

# La lumière dans les cristaux

anegeo 13/10/2024 (24/03/25)

## Petite intro

### Historique

- L'optique est une science ancienne considérée alors comme relativement indépendante. La lumière fascine. Le grec d'Alexandrie Euclide (3<sup>e</sup> avant notre ère), Ibn Al-Haytham (Alhazen en latin) à Bassora puis au Caire, vers l'an 1000, ont écrit des traités élaborés d'optique. On voit que la lumière se déplace en lignes droites, sa transmission semble instantanée. Le XVII<sup>e</sup> siècle est prolifique avec les débuts instrumentaux, longue vue, microscopes, donnant vue sur d'autres mondes, méga ou mini. C'est le siècle des J. Kepler (astronome allemand), W. Snell (hollandais, lois de l'incidence), R. Descartes (français, apport et vulgarisation de l'optique), F. Grimaldi (italien, description diffraction), R. Boyle (chimiste irlandais sur irisation des taches d'huile), R. Hooke (physicien anglais, *Micrographia* sur les instruments d'optiques), le grand I. Newton (mathématicien-physicien anglais, avec notamment théorie corpusculaire de la lumière), Olaûs Römer (astronome danois qui a proposé une première vitesse de la lumière, 210 000 km/sec, à partir de l'observation de décalages en fonction de la distance, des satellites de Jupiter) et le mathématicien-physicien hollandais Christiaan Huygens "Traité de la lumière" qui formule une explication de type vibratoire (de nature inconnue) de la lumière et qui a pressenti la nature des cristaux notamment anisotropes (une structure d'éléments en maille régulière), leur traversée par la lumière. Le siècle en reste sur cette polémique sur la nature de la lumière, corpusculaire soutenue par la célébrité I. Newton ou vibrationnelle (suite à C. Huygens). C'est en 1802 que l'expérience des franges du physicien anglais Thomas Young ébranle sérieusement la théorie corpusculaire et donne même une longueur d'onde ( $\sim 1/2 \mu\text{m}$ ) et, vu qu'on a la vitesse, se calquant sur les équations du son, une fréquence ( $\sim 6 \cdot 10^{14}$ ). En 1812 le français Augustin Fresnel publie des calculs élaborés sur les interférences, la diffraction et la polarisation qui contribuent à la théorie ondulatoire.
  - Dans d'autres domaines, il y avait les phénomènes électriques, statique (par friction, O. von Guericke, 1760, F. Hauksbee 1706, bouteille de Leyde 1746..., puis forces de C.A. Coulomb 1788) et les phénomènes magnétiques ("pierres d'aimant" de l'antiquité, "De Magnet" de W. Gilbert, 1600), relativement indépendantes alors aussi.
  - En 1820 le danois Hans Christian Oersted découvre qu'une aiguille aimantée placée près d'un fil parcouru par un courant électrique est déviée. Cela est précisé la même année par les physiciens français Jean Baptiste Biot et F. Savart. En 1826 le français André Ampère décrit le lien entre solénoïde avec un courant et le magnétisme. De 1831 à 1848 l'expérimentateur anglais Michael Faraday met en évidence un lien dynamique entre l'électrique et le magnétique, et même entre ce dernier et la lumière ... L'expression mathématiques des lois du flux électrique à travers une surface fermée ( $\text{div } E = \rho/\epsilon_0$ ) et du magnétisme dont le flux à travers une surface est zéro, a été utilisée par le mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss qui a travaillé sur le magnétisme avec son ami W. Weber dans les années 1830s et publié en allemand en 1839 (d'autres de ses écrits seront publiés après sa mort en 1855). Cette partie sur électricité et magnétisme intéressera surtout un certain Maxwell qui en fera grand usage.
- On sait dès lors produire de l'électricité continue et la stocker de manière pratique (machine de Pixii, dynamo de Gramme, pile Volta, pile Daniell...), les lois d'Ohm (1827 mais reconnues dans les années 1840s) et Joule (1840) sont établies. On fait circuler ce courant, la communication par fils télégraphiques a commencé. L'époque était mûre, en 1866 le théoricien écossais James Clerk Maxwell en rassemblant les différents éléments, notamment mathématiques, du puzzle, et avec un ajout personnel, "comprend". Il argumente que lumière, électrique et magnétisme ne font qu'un, sous de la personne de l'onde électromagnétique..., de haute fréquence (ce n'était pas sous la forme compacte actuelle, sa démonstration comportait de nombreuses équations). Le mathématicien/physicien hollandais Antoon Lorentz développe cette toute nouvelle théorie. Il avance que les atomes consistent de particules chargées (d'où viendra plus tard le concept d'électrons) et que l'oscillation de ces charges était la source de la lumière. Ses publications sur ce sujet ont commencé en 1878 (plus tard,

1904, des réflexions sur certains aspects lumineux dans l'espace l'amèneront à la notion d'un temps local avec des formules mathématiques sur lesquelles s'appuiera la relativité restreinte d'Einstein). En 1885 le physicien anglais J. H. Poynting regarde la théorie de Maxwell sous l'aspect énergétique. En mars 1888, le physicien allemand Heinrich Hertz montre l'existence d'ondes électromagnétiques dans l'air, expérience aussitôt considérées par les "maxwellien" comme la vérification expérimentale, à d'autres fréquences, de la théorie de Maxwell.

### Ondes électromagnétiques

La lumière est produite par une source énergétique. L'onde électromagnétique est cette énergie capable de voyager très loin de sa source : un champs électrique crée un champs magnétique qui crée un champs électrique, qui crée un champs magnétique, etc., interactions responsable du phénomène ondulatoire : du puzzle on peut de fait tirer l'équation d'une onde. Dans le vide, elle progresse à la (évidemment) vitesse de la lumière, mais, elle va rencontrer de la matière beaucoup plus dense.

### Les matériaux diélectriques

Diélectriques est le nom qui a été donné aux matériaux non conducteurs, = isolants, et non magnétiques. Bien que les charges du nuage électronique des atomes/molécules constituant un matériau dense ne sont pas libres, liées par attraction aux noyaux qu'elles sont, leurs périphéries sont supposées localement réactives quand soumises à l'application d'un champ électrique d'origine externe, qui est une composante (l'autre étant magnétique) de l'onde électromagnétique perturbatrice qu'est la lumière.

Un modèle (de Lorentz) considère que ce milieu est homogène et composé de dipôles avec chacun un/des électrons actifs, i.e., capables de se déplacer, "un tout petit peu", sous l'influence du champ électrique de l'onde lumineuse. Les atomes et molécules sont tout petits par rapport à la longueur d'onde de la lumière d'où l'acceptabilité d'une modélisation moyenne conceptuelle de ce type.

Le paramètre régulièrement utilisé pour décrire le comportement réactif du matériau est l'*indice* de réfraction,  $n$ . C'est (notamment) le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur celle dans le matériau, évidemment diminuée à cause de l'interaction. Cet indice est lié à un paramètre plus primitif de base, qualifié de *susceptibilité diélectrique* du milieu,  $\chi$ . C'est le rapport, proportionnel pour ce qui est de la lumière, entre la modification du moment des dipôles, appelée *polarisation*  $\mathbf{P}$ , sur le champs électrique de l'onde passante  $\mathbf{E}$ . Ce paramètre,  $\chi$ , et donc également  $n$  ( $n = \sqrt{1 + \chi}$ ), ne varient pas dans un matériau isotrope. Mais on comprend qu'ils varient suivant les directions dans les cristaux qui sont des réseaux aux structures régulières strictes.

Et peut se produire cette chose qui nous surprend, à travers un cristal de voir une image dédoublée, avec des propriétés de l'une des images qui semblent bien étranges que les anciens ont appelé *extraordinaire*. Et on constate que leurs champs électriques sont polarisés perpendiculairement l'un par rapport l'autre, c'est la biréfringence.

Couplé au modèle dipôle de Lorentz, le modèle électromagnétique, Maxwell..., le prévoit, l'explique pour l'échelle macroscopique, avec l'aide nécessaire des mathématiques.

Si sont utilisées des coordonnées sphériques, en terme de directions, il n'y a que deux degrés de liberté : l'espace peut être entièrement balayé en faisant varier les deux angles  $\theta$  (polaire) et  $\varphi$  (azimutal).

L'équation dite de Fresnel est un fondamental de l'optique cristalline. Elle est obtenue en tenant compte de toutes les conditions à respecter : lien entre la perturbation lumineuse et la polarisation électrique anisotrope des dipôles conceptuels du matériau étudié, et exige pour les ondes impliquées de respecter les relations imposées par les quatre équations macroscopiques couplées de Maxwell.

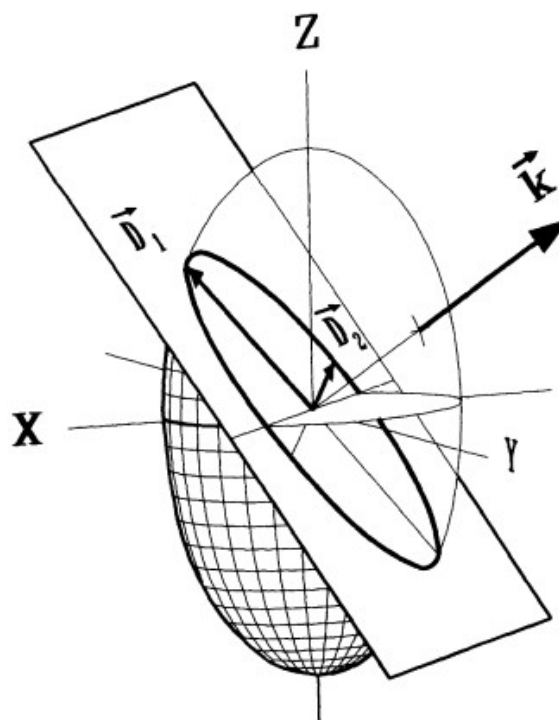
Cela se révèle être un problème mathématique de *valeurs* et *vecteurs propres* (*eigenvalues*, *eigenvectors*). En mots, cela signifie qu'il y a un lien très particulier entre l'hétérogénéité spatiale des propriétés du matériau et les champs électromagnétiques possibles qui le traversent.

Le résultat d'un tel modèle tombe, l'équation de Fresnel est du second degré en  $n^2$  et n'a donc que deux solutions (*propres*) : dans un matériau anisotrope, pour une direction donnée de propagation il y a deux indices de réfraction principaux,  $n$  (mesure de vitesse de propagation =  $c/v$ ), allant avec deux ondes électromagnétiques monochromatiques distinctes. Et les orientations de leur vibrations, *déplacement électrique*  $\mathbf{D}$ , sont mathématiquement définies aussi : elles sont perpendiculaires (et c'est parce qu'elles sont perpendiculaires, et comme ces oscillations sont dans un même plan, qu'il ne peut y avoir que deux valeurs). Dans le détail du modèle les deux images que l'on voit dépendent de l'énergie véhiculée, les vecteurs de poynting  $\mathbf{S}$  (en Watt/m<sup>2</sup>). Un seul de ces deux vecteurs est légèrement décalé des vecteurs d'onde ( $\mathbf{k}$ ). L'autre

(ordinaire) ne l'est pas, d'où la double image observée = c'est la réfraction *extraordinaire* de E. Bartholin et C. Huygens avec les cristaux uniaxiaux comme la calcite.

Il s'agit d'un couplage de modèles macroscopiques (Maxwell, Lorentz, Poynting), ce qui se passe au niveau atomique est inaccessible, mais son aspect pratique est validé parce que ces résultats expliquent de manière satisfaisante les observations et mesures.

Pour pouvoir dire cela, nous avons repris comme cadre deux extraits de cours d'optique qui traitent de cette même chose, le premier volontairement partagé par Peatross et Ware, pour son soin pédagogique, le deuxième par Yariv et Yeh parce qu'il situe l'origine de diagrammes que l'on rencontre en cristallographie. On les a parsemés de compléments explicatifs pris ici et là dans la littérature.



Ellipse résultante de l'intersection de l'ellipsoïde des indices et le plan perpendiculaire au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Les axes principaux de l'ellipse déterminent la direction d'oscillation des vecteur de *déplacement électrique*  $\mathbf{D}$ , elles,  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ , sont perpendiculaires l'une par rapport à l'autre, et les longueurs des demi-axes déterminent les valeurs des indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  correspondantes (Agulló-López et al. 1994, p. 31) ;

l'indice de réfraction est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur la vitesse de l'onde dans le matériel ( $n = v/c$ ), i.e. les deux rayons ont des vitesses différentes.





## Une petite vidéo (en anglais)

# Une description de la biréfringence

Chartier 2003,  
INPG/IMEP Grenoble

### Directions privilégiées de vibration

"Il arrive que lors de la réfraction entre deux milieux transparents un rayon lumineux incident donne naissance à deux rayons réfractés. Pour qu'il en soit ainsi il faut que l'un au moins des deux milieux soit anisotrope. Ce phénomène a reçu le nom de double réfraction, les milieux dans lesquels il se produit étant qualifiés de biréfringents.

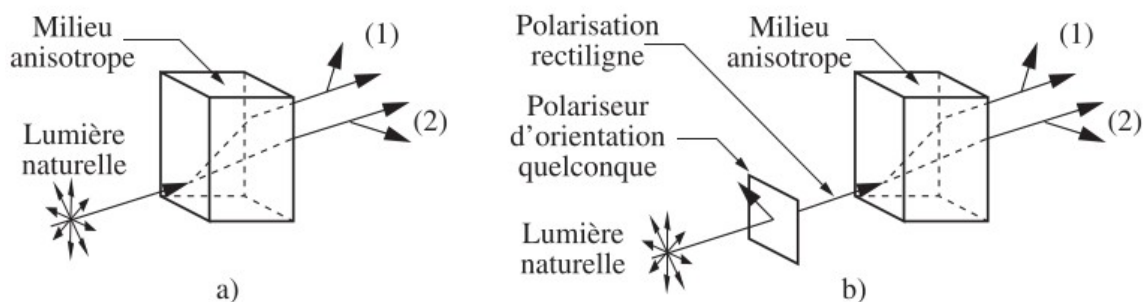


Fig-Chartier 1. "Expérience fondamentale sur la biréfringence"

Les deux faisceaux lumineux réfractés précédents sont toujours polarisés rectilignement selon deux directions qui sont orthogonales entre elles. Les polarisations des deux faisceaux sont fixées par le milieu anisotrope, si on fait tourner ce dernier, elles le suivent dans son mouvement de rotation. Sur les dessins des figures-Chartier 1, les deux directions de polarisation sont désignées par (1) et (2).

A partir d'un faisceau incident parallèle, une lame transparente, anisotrope et à faces planes et parallèles, donne deux faisceaux transmis qui sont parallèles au faisceau initial. Si la lame est suffisamment épaisse, les deux faisceaux transmis sont complètement séparés. Si, comme c'est le cas de la figure-Chartier 1b, on dispose un polariseur rectiligne d'orientation quelconque avant la lame, on a toujours deux faisceaux transmis, mais une rotation du polariseur d'entrée entraîne une variation des intensités relatives des deux faisceaux transmis. Il existe deux directions du polariseur pour lesquelles on n'a plus qu'un seul faisceau, l'autre faisceau étant alors éteint ; ces deux orientations sont respectivement parallèles aux directions (1) et (2). Nous verrons que ces directions de polarisation dépendent évidemment du milieu biréfringent, mais surtout qu'elles varient avec la direction du faisceau incident, on les appelle *directions de polarisations privilégiées* associées à la direction de propagation.

Dans un milieu isotrope, la vitesse de propagation de la lumière est la même, quelle que soit la polarisation de la lumière et quelle que soit la direction de propagation. Il en va différemment dans un milieu anisotrope où la vitesse de propagation dépend de la direction du faisceau incident. En fait, la situation est encore plus compliquée parce que les deux polarisations privilégiées associées à une direction de propagation donnée ne se propagent pas à la même vitesse. A une direction de polarisation correspondent donc deux vitesses de propagation  $V_1$  et  $V_2$  à partir desquelles on peut définir deux indices de réfraction  $n_1 = c/V_1$  et  $n_2 = c/V_2$ ...

### ... exemples de propagation en milieu anisotrope

La figure-Chartier 2a représente la traversée d'une lame de spath épaisse par un pinceau de rayons parallèles et polarisés rectilignement selon une direction quelconque faisant un angle  $\alpha$  avec le plan de la figure. L'incidence est normale, l'orientation du réseau cristallin par rapport aux faces de la lame a été choisie de façon à ce que les deux faisceaux réfractés soient dans le plan de la figure. Les deux faisceaux transmis sont parallèles à la direction du faisceau initial ; si la lame est assez épaisse, ils sont complètement séparés. Avec

la configuration particulière de la figure-Chartier 2, les polarisations des deux faisceaux sont respectivement parallèle et perpendiculaire au plan de figure ; si on désigne par  $I_0$  l'intensité lumineuse du faisceau incident, les deux faisceaux ont pour intensités respectives  $I_0 \cos^2 \alpha$  et  $I_0 \sin^2 \alpha$ .

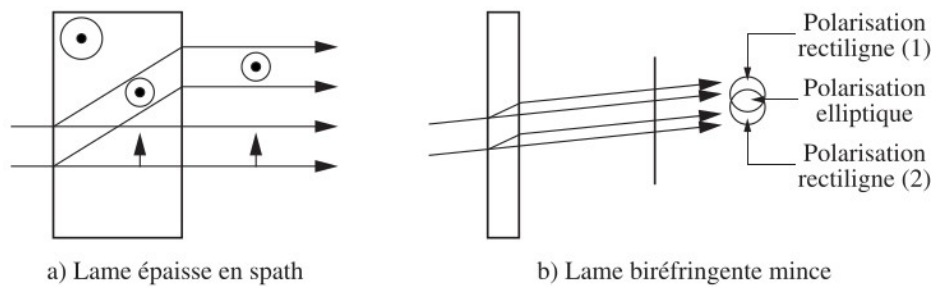


Fig-Chartier 2. "Traversée d'une lame à faces parallèles par un pinceau de rayons parallèles, l'axe optique est perpendiculaire au plan de la figure"

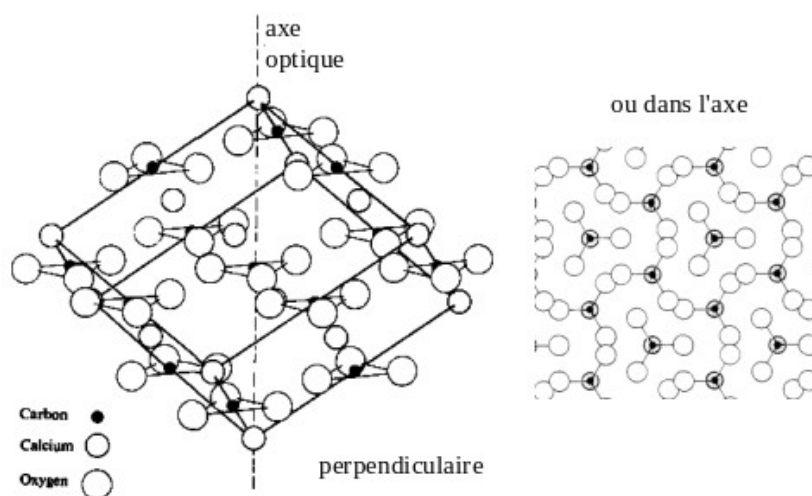
La lame de la figure-Chartier 2b est mince, son épaisseur  $e$  est de l'ordre de quelques dizaines de microns. Les deux faisceaux transmis sont parallèles, mais ils ne sont pratiquement pas séparés l'un de l'autre : leurs sections droites ont une large partie commune à l'extérieur de laquelle les deux faisceaux sont respectivement polarisés selon l'une ou l'autre de deux directions parallèles qui sont notées (1) et (2) sur la figure. Les directions (1) et (2) sont appelées « lignes neutres », ou encore « axes neutres », de la lame. Un faisceau incident polarisé rectilignement selon (1), ou (2), ressort respectivement avec la même polarisation, et, à l'intérieur de la lame, il s'est propagé avec la vitesse de phase  $V_1$ , (ou  $V_2$ ). Il est commode d'introduire des vecteurs unitaires notés  $\vec{1}$  et  $\vec{2}$  qui se rapportent respectivement aux directions (1) et (2) ; si  $V_1 > V_2$ ,  $\vec{1}$  est appelé *axe rapide* de la lame,  $\vec{2}$  étant appelé *axe lent* ; les indices de réfraction associés sont donc tels que  $n_1$  est plus petit que  $n_2$ .

On se reporte sur la figure-Chartier 2b, et, pour simplifier, on suppose que l'incidence est normale. Le vecteur qui représente la vibration lumineuse du faisceau incident étant  $(\vec{1} \cos \alpha + \vec{2} \sin \alpha)$ , dans la zone commune aux deux faisceaux émergents la vibration lumineuse est de la forme :

$$\vec{1} \cos \alpha e^{-j2\pi n_1 e/\lambda} + \vec{2} \sin \alpha e^{-j2\pi n_2 e/\lambda},$$

il s'agit d'une vibration elliptique." (pour elliptique, annexe P & J).

▪ Le lien entre les propriétés optiques et l'ordre atomique et leur liaisons est évident. A titre d'illustration l'arrangement pour la calcite perpendiculaire à, ou regardant dans, l'axe optique (Hecht, E. 2002 p. 338) :



A droite on aura pour chaque tour centré sur un groupe carbonate trois fois exactement la même chose. On voit à gauche que les groupes carbonates sont tous dans des plans perpendiculaire à l'axe, la déformation des nuages électroniques ne sera pas la même si la lumière arrive dans l'axe ou perpendiculairement.

## Regard avec les ondelettes de type Huygens

Hetch 2002

### Calcite (p. 337-42)

"... la calcite est le matériel le plus commun pour faire des polariseurs linéaires utilisés avec les lasers de grande puissance."

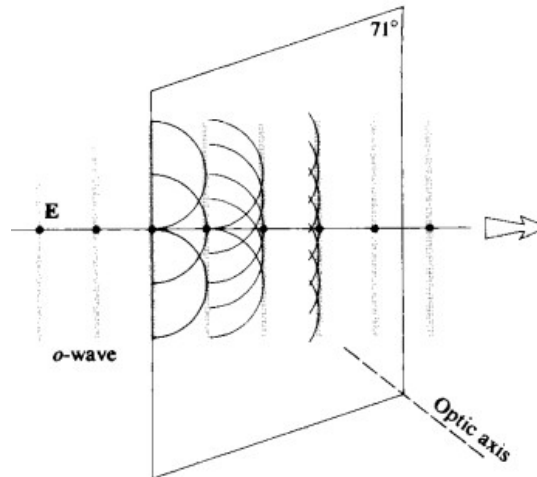


Fig. Hetch-1. "Une onde plane incidente perpendiculaire à la section principale"  
[cette dernière passe par l'axe optique et est normale aux surfaces de clivage, les vibrations de **E** sont perpendiculaires à la page, représenté par points le long du trajet]

"L'onde frappe la surface du cristal, et par conséquent provoque une mise en oscillation des électrons, et eux radiant à leur tour des ondelettes secondaires. Les ondelettes se surimposent et se recombinaient pour former l'onde réfractée, et le processus est reproduit répétitivement jusqu'à ce que l'onde émerge du cristal.

Tant que le champ **E** est perpendiculaire à l'axe optique, on assume que le front d'onde stimule des atomes sans nombre à la surface, qui ensuite agissent comme source d'ondelettes sphériques, toutes étant en phase. On suppose que, tant que le champ des ondelettes est partout normal à l'axe optique, elles vont s'épandre dans le cristal dans toutes les directions avec la vitesse  $v_{\perp}$ , comme elles le feraient dans un milieu isotrope (**Gardez à l'esprit que la vitesse est fonction de la fréquence**). Puisque les ondes-o ne montrent pas de comportement anomal, cette supposition semble raisonnable. L'enveloppe des ondelettes est essentiellement une portion d'onde plane, qui à son tour stimule une distribution de points sources atomiques secondaires. Le processus continue, et l'onde se déplace tout droit à travers le cristal.

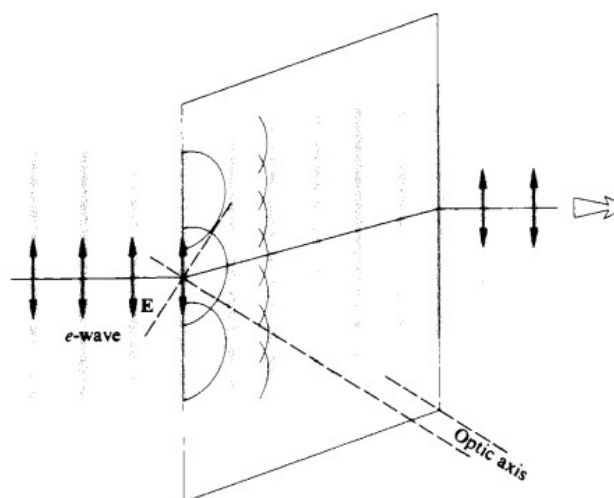


Fig. Hecht-2. "Une onde plane incidente polarisée parallèle à la section principale"

En contraste, considérez l'onde incidente dans la Fig. Hecht-2 dont le champ  $\mathbf{E}$  est parallèle à la section principale.

Remarquez que  $\mathbf{E}$  a maintenant une composante normale à l'axe optique, et aussi une composante qui lui est parallèle. Puisque le milieu est biréfringent, la lumière d'une fréquence donnée polarisée parallèle à l'axe optique se propage avec une vitesse  $v_{\parallel}$ , où  $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$ . En particulier pour la calcite et la lumière jaune sodium ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ),  $1,486v_{\parallel} = 1,658v_{\perp} = c$ . A quelle sorte d'ondelettes de Huygens peut-on s'attendre maintenant ? Au risque de trop simplifier les choses, nous représentons chaque ondelette-e, au moins pour le moment, comme une petites sphère (Fig. Hecht-3).

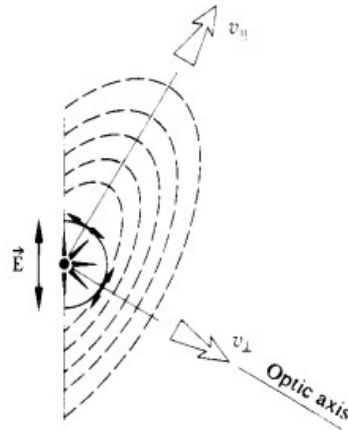


Fig. Hecht-3. "Ondelettes dans la calcite"

Mais  $v_{\parallel} > v_{\perp}$ , aussi l'ondelette va s'allonger dans toutes les directions normale à l'axe optique. Nous spéculons donc, comme l'a fait Huygens, que les ondelettes secondaires associées avec l'onde-e sont des ellipsoïdes de révolution par rapport à l'axe optique. L'enveloppe de toutes les ondelettes ellipsoïdales est essentiellement une portion d'onde plane parallèle à l'onde incidente. Cette onde plane, cependant va subir évidemment un déplacement latéral en traversant le cristal. Le faisceau se déplace dans une direction parallèle aux lignes qui connectent l'origine de chaque ondelette et le point de tangente avec l'enveloppe plane. Cela est connu comme la direction de raie et correspond à la direction avec laquelle l'énergie se propage.

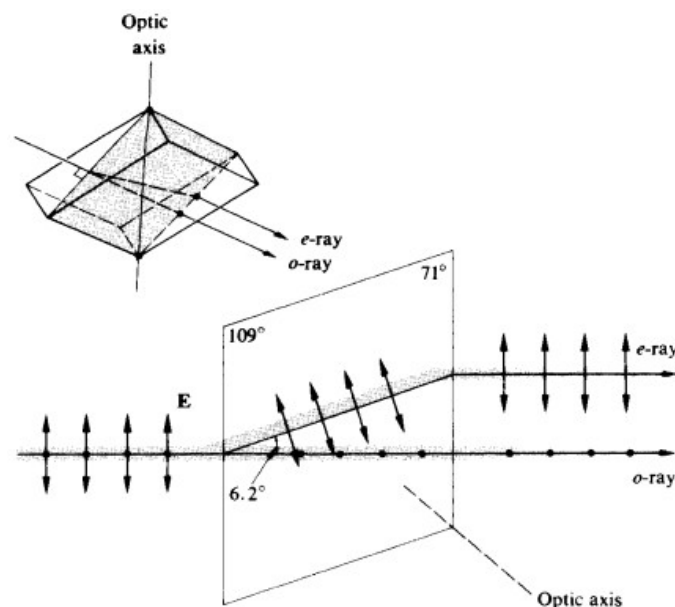


Fig. Hecht-4. "Un faisceau lumineux avec deux composantes de champ orthogonales qui traversent une section principale de calcite"

Clairement, dans un cristal anisotrope, la direction de la raie n'est pas normale au front d'onde. Si le faisceau incident est de la lumière naturelle, les deux situations dessinées en Fig. Hecht-1 et Hecht-2 existeront simultanément, avec le résultat que le faisceau va se séparer en deux faisceaux polarisés linéairement perpendiculairement (Fig. Hecht-4)." ...

▪ "La description électromagnétique de ce qui se produit est plutôt compliquée mais mérite d'être examinée à ce point, même si seulement superficiellement. Rappelez-vous du chapitre 3 que le champ  $\mathbf{E}$  incident va polariser le diélectrique; c'est-à-dire, il va déplacer la distribution des charges, ce faisant créant des dipôles électriques. Le champ dans le diélectrique est ainsi altéré par inclusion d'un champ induit et on est conduit à introduire une nouvelle quantité, le déplacement  $\mathbf{D}$ . Dans les matériaux isotropes,  $\mathbf{D}$  est relié à  $\mathbf{E}$  par une quantité scalaire et les deux sont donc toujours parallèles. Dans les cristaux anisotropes  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  sont reliés par un tenseur et ne sont pas toujours parallèles. Si l'on applique maintenant les équations de Maxwell au problème d'une onde qui se déplace dans un tel milieu, nous trouvons que les champs qui vibrent dans le front d'onde sont  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  et non plus comme avant,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Le vecteur de propagation  $\mathbf{k}$ , qui est normal aux surfaces de phase constantes, est maintenant perpendiculaire à  $\mathbf{D}$  plutôt qu'à  $\mathbf{E}$ . En fait  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{k}$  sont coplanaires. La direction de raie correspond à la direction du vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = v^2 \mathbf{c} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , qui est différent de  $\mathbf{k}$  en général. A cause de la manière dont les atomes sont distribués,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  seront cependant colinéaires lorsqu'ils sont tous les deux soit parallèles soit perpendiculaires à l'axe optique. Cela veut dire que les ondelettes-o rencontreront un milieu effectivement isotrope et donc seront sphériques, ayant  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{k}$  colinéaires. En contraste, les ondelettes-e auront  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{k}$ , ou de manière équivalente  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ , parallèles seulement dans les directions le long ou normalement à l'axe optique. A tous les autres points sur l'ondelette, c'est  $\mathbf{D}$  qui est tangent à l'ellipsoïde, et donc c'est toujours  $\mathbf{D}$  qui finit dans l'enveloppe ou le front d'onde composite dans le cristal (Fig. Hecht-5)."

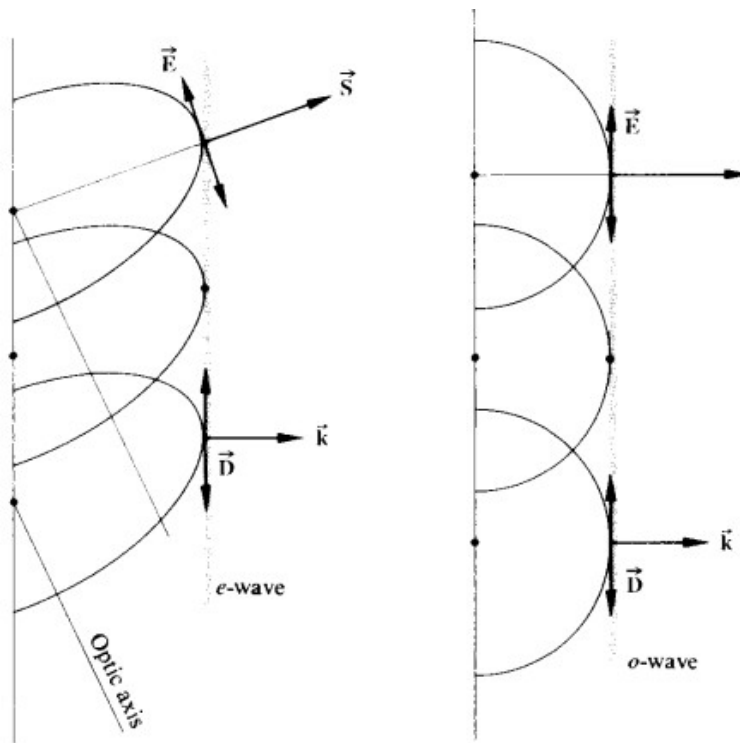


Fig. Hecht-5. "Orientations des vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{k}$ ."

• Ortolí et Pharo (2007, p. 135) à propos des difficultés à imaginer/comprendre le passage entre le monde quantique et le monde de la physique classique prennent l'optique (isotrope) comme un exemple à méditer : "Le physicien Roland Omnès en donne une analogie plus physique : quand une onde lumineuse entre dans un milieu transparent (du verre, de l'eau), toutes les molécules émettent des ondelettes qui interfèrent pour ne laisser subsister qu'une seule onde réfractée qui se propage plus lentement. Il y a partout des interférences mutuellement destructives entre les ondelettes, sauf pour l'onde macroscopique qui subsiste."

# Physique de la lumière et optique

J. Peatross et M. Ware

2015

Brigham Young University (Provo, Utah)

issu d'un cours d'optique pour les étudiant-e-s 4<sup>ème</sup> années en Physique et Astronomie

- Extraits concernant les cristaux -

- souvent en citation (guillemets) + en couleur : ajouts-

## Chapitre 0

### 0.1 Analyse vectorielle, dérivées multidimensionnelles en coordonnées cartésiennes

(on a présenté les vecteurs [ici](#) en § I. et, pour le présent chapitre on a complété avec des ouvrages mathématiques).

Toute position dans l'espace correspond à un vecteur unique  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ , où  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  sont des vecteurs unité (longueur 1), qui pointent le long de leurs axes respectifs à partir de l'origine.

L'opérateur **différentiel** ou **vectoriel**,  $\nabla$  (se lit "del" ou nabla) est défini par :

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

En manipulation vectorielle,  $\nabla$  peut être traité comme un vecteur régulier qu'il mime, bien qu'il ne veuille pas dire grand chose tant qu'on ne lui a pas fourni une fonction sur sa droite sur laquelle agir (de la même façon que le symbole  $d/dx$  ne prend son sens que lorsqu'il a une fonction à sa droite). Car alors, par cet "agir" il peut faire tout ce que peuvent faire les autres vecteurs à sa place, i.e être "multiplié" par un scalaire (fonction scalaire), par un autre vecteur (fonction vectorielle) en produit scalaire ou par un autre vecteur (fonction vectorielle) en produit vectoriel.

Si  $\psi(x, y, z)$  et  $\mathbf{V}(x, y, z)$  ont des premières dérivées partielles continues, alors on peut définir :

- l'opérateur **gradient** est lorsque  $\nabla$  est appliqué à une fonction scalaire :

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (0.4)$$

avec l'apparence d'un vecteur  $\nabla$  qui "multiplie" un scalaire, mais qui en fait donne l'instruction de différentier ce qui suit. Car les composantes cartésiennes du champ gradient sont les dérivées partielles de premier ordre du champ scalaire. Et le résultat est un vecteur.

Le gradient donne la variation la plus grande le long d'une direction dans l'espace. La direction du vecteur gradient est la direction le long de laquelle est cette plus grande valeur. Le champ vectoriel gradient est partout à angle droit aux contours du champ scalaire (comme le gradient max est perpendiculaire aux contours topo, mais à voir en 3D)

. Kreyszig (1983 p. 391) : "Certains des champs vectoriels que l'on trouve en physique sont donnés par des fonctions vectorielles qui peuvent être obtenues comme les gradients de fonctions scalaires qui conviennent. Une telle fonction scalaire est alors appelée fonction potentielle ou potentiel, du champ vectoriel. L'utilisation de potentiels simplifie considérablement l'étude de ces champs vectoriels."

ex. écoulement de chaleur gradient du champ de température, écoulement de courant électrique gradient du champ de potentiel électrostatique...

- l'opérateur **divergence** ( $\nabla \cdot$ ) qui s'applique aux fonctions vectorielles par :

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (0.5)$$

C'est le produit scalaire de l'opérateur vectoriel avec un vecteur, c'est donc un scalaire.  $\text{div } \mathbf{V}$  représente le flux du vecteur  $\mathbf{V}(x,y,z)$  par unité de volume, à travers une surface fermée enserrant le point de coordonnée  $x, y$ , et  $z$ .

- l'opérateur **rotationnel** ou curl ( $\nabla \times$  ou  $\nabla \wedge$ ) qui s'applique aussi aux fonctions vectorielles par :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} = \text{curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \nabla \wedge \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (0.6)$$

c'est le résultat du produit vectoriel ( $\times$  chez anglo-saxon,  $\wedge$  en France) de l'opérateur vectoriel avec un vecteur. C'est donc un vecteur.  $\text{rot } \mathbf{V}$  représente la circulation par unité de surface du vecteur  $\mathbf{V}(x,y,z)$  le long de contours fermés respectivement perpendiculaires aux axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

• Autre opérateur fréquent en physique :  $\nabla^2$  est l'**opérateur laplacien**, écrit  $\Delta$  en France (nabla carré ou delta) :

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On l'a par l'opération  $(\nabla \cdot \nabla)$ , i.e. le produit scalaire de l'opérateur différentiel par lui-même, à gauche, par ex. d'une fonction  $\psi$ . Mais on l'a aussi par la double opération div sur gradient :  $\text{div}(\text{grad } \psi) = \nabla^2 \psi = (\nabla \cdot \nabla) \psi$ .  $\nabla^2$  peut agir sur des champs scalaires ou vectoriels. Un problème classique est lorsqu'il y a une source à l'intérieur d'un volume (chaleur, charge...) la divergence s'écrit  $\text{div} \mathbf{F} = S$ , et si  $\mathbf{F} = -\nabla \psi$  (appelé champ conservatif), alors on a :  $\nabla^2 \psi = -S$ . La loi de Gauss peut être écrite ainsi avec le potentiel électrostatique ( $\mathbf{E} = -\nabla V$ ) :  $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Toute équation de la forme  $\nabla^2 \psi = -S$ , où  $S$  est un champ scalaire est connue comme *équation de Poisson*. Lorsque le terme source  $S = 0$ ,  $\nabla^2 \psi = 0$ , c'est comme *équation de Laplace* (Durrant 1996, p. 211).

• **Théorème de divergence** (ou théorème d'identité de Gauss ou théorème de Green dans l'espace)

Le théorème de divergence spécifie que l'intégrale de surface de la composante normale d'un vecteur  $\mathbf{F}$  pris sur une surface fermée est égale à l'intégrale de la divergence de  $\mathbf{F}$  pris sur le volume enfermé par cette surface.

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_V \text{div } \mathbf{F} \, dv = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv \quad \text{ou} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv \quad (0.11)$$

où  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$  et  $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  angles entre la normale à la surface et les axes positifs,  $x, y$  et  $z$ ).

"Le théorème de divergence est particulièrement utile en connexion avec la loi de Gauss, où le membre de gauche est interprété comme le nombre de lignes de champ qui existent dans une surface fermée"

# Chapitre 1

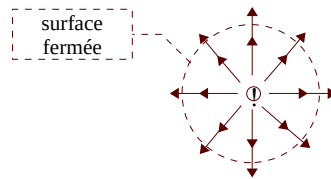
## Phénomènes Électromagnétiques

(L'annexe U.G. fait un tour des lois classiques de l'électricité, statique, cinétique, et électromagnétisme)

"En 1861, James Maxwell a assemblé les relations connues variées de l'électricité et du magnétisme dans un un ensemble concis d'équations :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad \text{géné de loi de Coulomb} \quad (1.1)$$

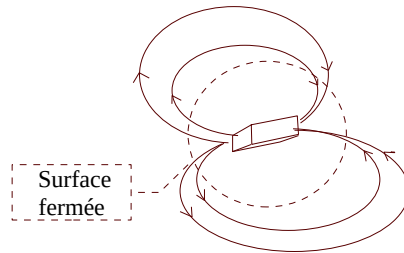
le flux/intensité du champ vectoriel électrique  $\mathbf{E}$  (uniquement) à travers une surface fermée est proportionnel à la densité de charge électrique (en  $\text{C}/\text{m}^3$ ),  $\epsilon_0$  constante électrique caractéristique du milieu



l'être mathématique Divergence,  $\text{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$ , décrit cette loi.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Loi de Gauss pour le magnétisme}) \quad \text{géné de loi Biot-Savart} \quad (1.2)$$

Le bilan de flux/intensité du champ vectoriel magnétique  $\mathbf{B}$  à travers toute surface fermée est nulle, sa divergence  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  est nulle, zéro. C'est toute la différence avec le champs électrique, les lignes du champ magnétique ne divergent aucunement (i.e. le mono-pôle magnétique n'existe pas)

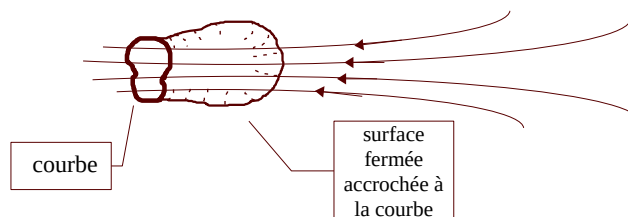


Il n'y a pas d'équivalent magnétique à la charge électrique : la nature n'offre pas de "masses magnétiques séparées", elles n'existent que par paires.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (1.3)$$

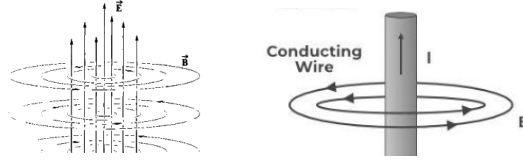
$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont liés dès qu'intervient le temps ( $\partial./\partial t$ )

Cette équation met en scène, de manière très appropriée, la circulation d'un champ électrique le long d'une courbe imposée (l'être mathématique *rotationnel* ou *curl*, qui signifie boucle en anglais) tandis que cette courbe sert d'appui à une surface quelconque. (1.3) dit que la circulation de  $\mathbf{E}$  le long de la courbe (terme de gauche) est égale à la variation du flux de  $\mathbf{B}$  à travers la surface accrochée. C'est la loi de base sur laquelle s'appuie le principe de fonctionnement des transformateurs, des inducteurs et de nombreux types de moteurs et générateurs électriques.



$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (\text{Loi d'Ampère révisée par Maxwell}) \quad (1.4)$$

création de  $\mathbf{B}$  par une variation de  $\mathbf{E}$  et flux du vecteur densité de courant. C'est un rotationnel/curl : les lignes de champs de  $\mathbf{B}$  forment des boucles autour du fil conducteur. C'est donc ici l'origine, la création du champs magnétique  $\mathbf{B}$  qui est traité. Il n'y a pas de symétrie entre la création d'un champs  $\mathbf{E}$  et d'un champ  $\mathbf{B}$ . Ici, il y a un terme en plus. Pour transcrire l'observation de Oersted (aiguille aimantée à coté de fil électrique,  $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ ), l'équation pose la proportionnalité entre la circulation du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le flux d'une nouvelle grandeur,  $\mathbf{j}$  : le vecteur densité de courant (ampères par mètre carré)



La révision de Maxwell (ajout du terme  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ) était particulièrement importante puisque si un changement de champ magnétique crée un champ électrique, un changement de champ électrique produit à son tour un champ magnétique. Ces équations autorisaient un phénomène auto-entretenu, de type ondulatoire. Les constantes fondamentales  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  sont définies en électricité et magnétisme, ce qui montre bien la connexion avec la lumière.

"ici  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  représentent les champs électrique et magnétique, respectivement. La densité de charge  $\rho$  décrit la charge par volume distribuée dans l'espace. La densité de courant  $\mathbf{J}$  décrit le mouvement de la densité de charge (en unités de  $\rho$  fois la vitesse). La constante  $\epsilon_0$  est appelée la permittivité, et la constante  $\mu_0$  est appelée la perméabilité.

Prises ensemble, elles sont connues comme les équations de Maxwell.

Après avoir introduit une révision clé de la loi d'Ampère, Maxwell a réalisé que ensemble ces équations comprennent une théorie self consistante des phénomènes électromagnétiques. De plus, les équations impliquent l'existence d'ondes électromagnétiques qui voyagent à la vitesse de la lumière. Puisque la vitesse de la lumière avait été mesurée avant l'époque de Maxwell, il était immédiatement apparent (comme cela était déjà suspecté) que la lumière est une manifestation haute fréquence des mêmes phénomènes qui gouvernent l'influence des courants et charges l'un sur l'autre. Auparavant, l'optique avait été considérée comme sujet assez séparé de l'électricité et du magnétisme. Une fois la connexion faite, il est devenu clair que les équations de Maxwell forment les fondations théoriques de l'optique, et c'est là que nous commençons notre étude de la lumière."

Ils présentent alors les 4 équations séparément, sections 1.1 à 1.4, plus l'ajustement de la loi d'Ampère 1.5, ce qu'on a fait plus ou moins ci-dessus, pour le cadre d'origine de ces équations, voir Annexe UG, enfin :

## 1.6. Polarisation des matériaux (p. 34)

"On en a essentiellement fini de notre analyse des équations de Maxwell sauf pour une discussion brève sur le courant de densité  $\mathbf{J}$  et la densité de charge  $\rho$ . Par commodité, il est habituel de décomposer la densité de courant en trois catégories :

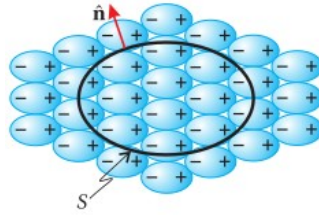
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{free}} + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p \quad (1.28)$$

D'abord, comme vous pouvez l'attendre, les courants peuvent provenir des charges libres tels que les électrons dans un métal, chose à quoi on réfère par  $\mathbf{J}_{\text{free}}$ . Deuxièmement, les atomes individuels peuvent présenter des courants internes qui donnent lieu à des effets paramagnétiques et diamagnétiques, notés comme  $\mathbf{J}_m$ . Ils sont rarement importants en problèmes d'optique, aussi on ignorera ces types de courant en écrivant  $\mathbf{J}_m = 0$ .

Le troisième terme dans (1.28) vient des matériaux diélectriques dont les charges sont liées à des molécules individuelles et ne sont pas libres de se déplacer dans le matériel. **Bien que les charges dans chaque molécule sont liées, elles restent capables de se déformer en réponse à l'application de champ électrique, ce qui change le moment du dipôle de la molécule.** On décrit la distribution spatiale de ces dipôles microscopiques avec la fonction  $\mathbf{P}$ , appelé polarisation<sup>11</sup>, (on a mis en gras)

<sup>11</sup> Malheureusement, **le mot polarisation a un double usage**. Il réfère aussi à l'orientation de champs électrique dans les ondes électromagnétiques...

mesurée en unités de dipôles par volume, ou charge fois longueur par volume. Une région de polarisation uniforme est dessinée en Fig. 1.7. [divergence = 0]



**Figure 1.7** A polarized medium with  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ .

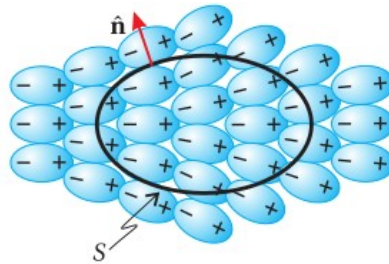
Quand le champ électrique appliqué varie dans le temps, les dipôles changent de force ou d'orientation en fonction du temps et **les mouvement de ces charges liées provoquent le lever d'une densité de courant effective dans le matériau, auquel on réfère comme le courant de polarisation,  $\mathbf{J}_p$** . Notez que la dérivée par rapport au temps du moment d'un dipôle individuel donne la charge fois la vitesse. Ainsi, la dérivée par rapport au temps des **dipôles en balancement** (on met en gras) par volume donne une densité de courant égale à

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{1.29}$$

**Ce courant de polarisation  $\mathbf{J}_p$  génère l'indice de réfraction pour les matériaux diélectriques** (on met en gras), comme on le verra dans le chapitre suivant.

Ensuite on se tourne vers la densité de charge. (...)

On pourrait être tenté ... d'assumer que la densité globale de charge est zéro, mais on aurait tort. Même dans un matériel qui est neutre globalement, la polarisation  $\mathbf{P}$  peut varier dans l'espace, ce qui conduit à des concentrations de charges positives ou négatives. Ce type de densité de charge est écrit  $\rho_p$ . Cela provient de l'arrangement non uniforme des des dipôles, comme dessiné en Fig. 1.8.



**Figure 1.8** In a nonuniformly polarized medium with  $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$  local concentrations of charge density can occur.

Pour lier  $\rho_p$  avec  $\mathbf{P}$ , on écrit l'équation de continuité (1.23, il s'agit de  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ) pour le courant et les densités de charge associées avec la polarisation :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \tag{1.31}$$

Substitution de (1.29) dans cette équation donne de suite :

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{1.32}$$

(...)

(p. 36) En résumé, les équations de Maxwell dans un milieu électriquement neutre ( $\rho_{free} = 0$ ) non magnétique ( $\mathbf{J}_m = 0$ ) peuvent être écrites en termes de la polarisation  $\mathbf{P}$  comme<sup>12</sup> :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (1.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Loi de Gauss pour le magnétisme}) \quad (1.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (1.35)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j}_{free} \quad (\text{Loi d'Ampère révisée par Maxwell}) \quad (1.36)$$

[on voit que dans (1.33)  $\nabla \cdot \mathbf{P}$  se substitue à  $\rho$ ; dans (1.36)  $\partial \mathbf{P} / \partial t + \mathbf{J}_{free}$  se substitue à  $\mathbf{J}$ ]

<sup>12</sup> Il n'est pas rare de voir les équations macroscopiques de Maxwell écrites en termes de deux champs auxiliaires :  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$ . Le champ  $\mathbf{H}$  est utile pour les matériaux magnétiques. Dans ces matériaux, la combinaison  $\mathbf{B}/\mu_0$  dans la loi d'Ampère est remplacée par  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ , où  $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$  est le courant associé à la magnétisation du matériel. Puisque nous ne traitons que de matériaux non magnétiques ( $\mathbf{M} = 0$ ), il n'y a pas d'intérêt à utiliser  $\mathbf{H}$ . Le champ  $\mathbf{D}$ , appelé déplacement, est défini comme  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . Cette association de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  se trouve dans la loi de Coulomb et la loi d'Ampère. Dans un but de clarté physique, les auteurs de ce livre ont décidé de retenir la prééminence de la polarisation  $\mathbf{P}$  dans les équations.

## 1.7 L'équation d'onde

"Quand Maxwell a unifié la théorie électromagnétique, il a remarqué immédiatement que des ondes sont solutions de son groupe d'équations. En fait, son désir de trouver un groupe d'équations qui étaient compatibles avec des ondes avait été une aide pour trouver les équations correctes. Après tout, il était déjà connu que la lumière voyageait sous forme d'ondes. Kirchhoff avait souligné auparavant que  $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  donne la vitesse correcte de la lumière  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s (qui avait été mesurée auparavant). **Faraday et Kerr avaient observés que des champs électriques et magnétiques forts affecte la lumière qui se propage dans les cristaux** [on met en gras]. Le temps était mur pour suspecter que la lumière était un phénomène électromagnétique qui se produit à haute fréquence.

A première vue, les équations de Maxwell peuvent ne pas suggérer immédiatement (à l'œil qui n'a pas l'expérience) que des ondes sont solutions. Cependant on peut manipuler les équations (les équations différentielles de premier ordre qui couplent  $\mathbf{E}$  à  $\mathbf{B}$ ) dans l'équation d'onde familière (équations différentielles du deuxième ordre découplées pour l'un et l'autre  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{B}$ ). Vous devriez devenir familiers avec cette dérivation. Dans ce qui suit, nous dériverons l'équation d'onde pour  $\mathbf{E}$ . La dérivation de l'équation d'onde pour  $\mathbf{B}$  est très similaire.

▪ Dérivation de l'équation d'onde

Prendre le rotationnel de (1.3, qui est  $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ) donne

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (1.37)$$

Nous pouvons éliminer  $\nabla \times \mathbf{B}$  en substituant de (1.4 qui est  $\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$ ) qui donne

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (1.38)$$

Ensuite nous appliquons l'identité de vecteur (0.10)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  et utilisons la loi de Gauss (1.1 qui est  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ) pour remplacer le terme  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  ce qui nous amène à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} \quad (1.39)$$

- fin de la Dérivation de l'équation d'onde -

Si nous performons la dérivation ci-dessus en partant de (1.33)-(1.36) (ou de manière équivalente si nous substituons (1.28)-(1.32) dans (1.39), nous obtenons une forme qui est plus utile en optique :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{free}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (1.40)$$

Ceci est l'équation d'onde pour le champ vecteur  $\mathbf{E}$ .

Les constantes  $\epsilon$  (epsilon, "E" comme Électricité, en grec) et  $\mu$  (mu, "M" comme Magnétisme, en grec) sont les constantes établies par les lois de base de l'électricité et électromagnétisme,  $\epsilon_0$ , dans celle de Coulomb (électrique), et  $\mu_0$  dans celle de Biot-Savart (électromagnétisme) : voir annexe U.G.

▪  $\epsilon$  est la **permittivité électrique** = mesure l'aptitude d'un matériel à "attraper" et stocker des charges électriques, sa *capacité* électrique sur la distance unité.

Dans le vide, valeur la plus basse possible,  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$  farad par mètre, F/m. C'est une valeur déduite.

▪  $\mu$  est la **perméabilité magnétique** qui mesure l'aptitude d'un matériel à accueillir intérieurement des lignes/un champ, magnétique, i.e. sa faculté à être magnétisé.

Dans le vide, valeur la plus basse possible,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  en tesla-mètre/ampère, T·m/A, ou Henry par mètre, H/m. Il s'agit là d'une valeur définie exactement.

Le coté gauche de (1.40), lorsque mis égal à zéro, est l'équation d'onde familière. Cependant, le coté droit de (1.40) contient un nombre de 'termes source', qui se présentent lorsque des courants variés et/ou polarisation sont présents. Le premier terme sur la droite de (1.40) décrit un courant de charges libres, qui sont importantes pour la détermination de lumière réfléchie d'une surface métallique ou pour déterminer la propagation de la lumière dans un plasma. **Le deuxième terme du coté droit décrit les oscillations de dipôle, qui se comportent de manière similaire aux courants. Ces oscillations de dipôles jouent un rôle prééminent quand la lumière se propage dans des matériaux non conducteurs. Le dernier terme du coté droit de (1.40) est important dans les matériaux non isotropes tels que les cristaux. Dans ce cas, la polarisation  $\mathbf{P}$  répond au champ électrique le long d'une direction qui n'est pas nécessairement parallèle à  $\mathbf{E}$ , à cause de l'influence du réseau cristallin** (c'est adressé dans le chapitre 5). (on met en gras)

En résumé, quand la lumière se propage dans un matériau, au moins un des termes du coté droit de (1.40) ne sera pas nul. Comme exemple, **dans le verre**,  $\mathbf{J}_{\text{free}} = 0$  [non conducteur] et  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  [pas de champs qui puisse se détacher des atomes], mais  $\partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2 \neq 0$  puisque **la polarisation du matériau répond au champ lumineux**, donnant lieu à un indice de réfraction (discuté en chapitre 2)."

... Le champs magnétique  $\mathbf{B}$  satisfait une équation d'onde similaire, découplée de  $\mathbf{E}$ ... Cependant les deux ondes ne sont pas indépendantes. Les champs pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  doivent être choisis compatibles l'un avec l'autre via les équations de Maxwell. Après avoir résolu l'équation d'onde (1.40) pour  $\mathbf{E}$ , on peut obtenir la  $\mathbf{B}$  compatible de  $\mathbf{E}$  via la loi de Faraday (1.35).

Dans le vide, tous les termes du coté droit de (1.40) sont zéro. Dans ce cas, l'équation d'onde se réduit à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{vide}) \quad (1.41)$$

Les solutions à cette équation peuvent prendre toute forme fonctionnelle imaginable (spécifiée à un instant donné - l'évolution ensuite contrôlée par (1.41)). De plus, puisque l'équation différentielle est linéaire, tout nombre de solutions peuvent être additionnées ensemble pour créer d'autres solutions valides.

Considérez la sub-classe de solutions qui se propagent dans une direction particulière. Ces formes d'ondes gardent leur forme pendant qu'elle voyagent avec la vitesses

$$c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (1.42)$$

obtenu avec  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{C}^2$

Dans ce cas,  $\mathbf{E}$  dépend de l'argument  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - ct$ , où  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unité qui spécifie la direction de propagation. La forme est préservée puisque les caractéristiques qui se produisent à une position donnée reviennent "en aval" à une distance  $ct$  après un temps  $t$ . En vérifiant cette solution en (1.41), on confirme que la vitesse de propagation est  $c$ ... Comme mentionné auparavant, on peut ajouter ensemble toute combinaisons de solutions (même avec des directions différentes de propagation) pour former d'autres solutions valides.

## Chapitre 2

### Ondes planes et Indice de réfraction

"ondes planes : "le front d'onde forme un plan... un front d'onde est une surface dans l'espace où l'argument du cosinus (i.e. la phase de l'onde) a une valeur constante." (p. 40). = perturbations se déplaçant sous la forme de plans perpendiculaires à la direction de propagation = focus de points dans l'espace qui sont tous dans une phase identique de leur vibration. L'onde se propage dans une direction perpendiculaire à l'onde de front. Le front d'onde est plat et d'extension infinie, c'est l'exemple le plus simple d'onde à trois dimensions (Annexe O.P.)

p. 43 : "Dans un matériau, **le champ électrique d'une onde plane induit une oscillation des dipôles, et ces dipôles oscillants à leur tour affectent le champ électrique. On utilise l'indice de réfraction pour décrire cet effet** (on met en gras). Les ondes planes de fréquences différentes ont des indices de réfraction différents, ce qui fait qu'elles voyagent à des vitesses différentes dans les matériaux. Ainsi une forme ondulatoire, qui est composée de multiples ondes sinusoïdale, invariablement change de forme en voyageant dans un matériau, parce que les ondes sinusoïdales changent de relation les unes par rapport aux autres. Ce phénomène de dispersion est la raison première pour laquelle les physiciens et ingénieurs choisissent de travailler avec des ondes sinusoïdales. Toute forme ondulatoire, sauf pour les ondes sinusoïdales individuelles, change de forme en voyageant dans un matériel.

#### 2.1 Solutions d'onde plane à l'équation d'onde

"Considérez l'équation d'onde pour une forme d'onde champ électrique qui se propage dans le vide (1.41)

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Nous sommes intéressés par des solutions à (2.1) qui ont la forme fonctionnelle... (Annexe O.P.)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (2.2)$$

ici  $\phi$  représente un terme phase arbitraire (constant). Le vecteur  $\mathbf{k}$ , appelé le **vecteur d'onde**, peut être écrit comme

$$\mathbf{k} \equiv k \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{vide}) \quad (2.3)$$

où  $k$  (*norme de  $\mathbf{k}$ , constante de propagation, nombre d'onde*  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ ; annexe O.P.) a les unités de l'inverse d'une longueur,  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unité qui **définit la direction de propagation**, et  $\lambda_{\text{vide}}$  est la longueur par laquelle  $\mathbf{r}$  doit varier (dans la direction de  $\hat{\mathbf{u}}$ ) pour que le cosinus fasse un cycle complet. Cette distance est connue comme la longueur d'onde (dans le vide). La fréquence de l'oscillation (*aussi appelée pulsation*) est liée à la longueur d'onde via

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_{\text{vide}}} \quad (\text{vide}) \quad (2.4)$$

La fréquence de  $\omega$  a des unités de radian par seconde ( $\pi$  en radians équivaut à  $180^\circ$ ,  $\sim 3,14 \times 57,3$ ). La fréquence est aussi souvent exprimée comme  $\nu \equiv \omega/2\pi$  en unités de cycles par seconde ou Hz. Notez que  $k$  et  $\omega$  ne peuvent pas être choisis indépendamment; l'équation d'onde demande qu'ils soient liés par la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{vide}) \quad (2.5)$$

(...) Quelques fois la période spatiale de l'onde est exprimée comme  $1/\lambda_{\text{vide}}$  en unités de  $\text{cm}^{-1}$ , appelé le nombre d'onde.

Une onde magnétique accompagne l'onde électrique, et elle obéit à une équation d'onde similaire... L'onde magnétique qui correspond à (2.2) est

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (\text{vide}) \quad (2.6)$$

Il est important de noter que  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$ , et  $\phi$  ne sont pas choisis indépendamment dans (2.6). Afin de satisfaire la loi de Faraday (1.3 qui est  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ), les arguments des cosinus  $[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)]$  dans (2.2) et (2.6)

doivent être identiques. Par conséquent dans le vide les champs électrique et magnétique doivent être identiques. Donc dans le vide, les champs électrique et magnétique voyagent en phase. De plus la loi de Faraday ( $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ) exige...

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} \quad (2.7)$$

▪ Reitz est al (1979, p. 360) : "En différenciant une fonction de la forme  $\bar{E}e^{-i\omega t}$  en respect à  $t$ , on voit que l'opérateur  $\partial/\partial t$  est

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

propriété des exponentielles :  $\partial(e^{ax})/\partial x = a e^{ax}$ ,

pour une fonction de cette forme particulière. De même on trouve... que pour une fonction de la forme  $\bar{E}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , l'opérateur  $\nabla$  est :

$$\nabla = i\mathbf{k}$$

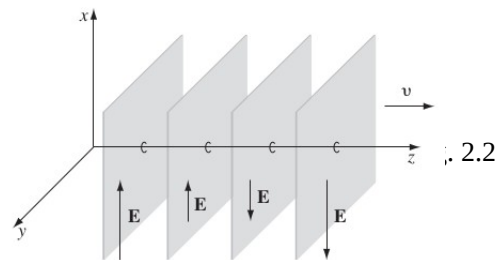
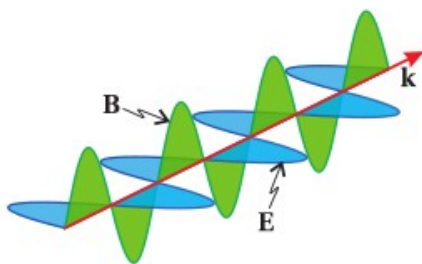
Ainsi les équations de Maxwell deviennent ...ils donnent  $\mathbf{k}\times\bar{\mathbf{E}} = \omega\bar{\mathbf{B}}$ ...pour des ondes planes (après que  $i$  et les exponentielles aient été supprimés)."

- Cela fait écrire à Chartier, (2003, p. 150), après avoir donné la notation complexe de l'équation classique d'onde sinusoïdale : "Pour ce type particulier d'ondes, les équations de Maxwell ne sont plus des relations entre les opérateurs fonctionnels rotationnel, gradient, divergence..., mais elles se ramènent à des produits vectoriels et scalaires", il donne, notamment :  $\mathbf{k}\times\bar{\mathbf{E}} = \omega\bar{\mathbf{B}}$

- fin précisions Reitz et al. et Chartier -

Ce produit vectoriel signifie que  $\mathbf{B}_0$  est perpendiculaire et à  $\mathbf{E}_0$  et à  $\mathbf{k}$ . Par ailleurs la loi de Gauss  $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$  force  $\mathbf{k}$  à être perpendiculaire à  $\mathbf{E}_0$ . Il s'en suit que les magnitudes des champs sont liées par  $B_0 = k E_0/\omega$  ou  $B_0 = E_0/c$  par (2.5)."

(p. 44), Hormis pour les lasers d'intensité extrême, "l'effet du champ magnétique peut être ignoré sans risque. Dans la suite de ce livre, on portera notre attention principalement sur le champ électrique, sachant que l'on peut à tout moment déduire le champ magnétique (d'importance moindre) du champ électrique via la loi de Faraday.



La figure 2.2 montre le champ électrique (2.2) et le champ magnétique associé (2.6). Elle est insatisfaisante (on a ajouté à droite une représentation de Griffiths 2017 p. 395) parce que les champs ne ressemblent pas à des ondes transversales sur une corde. L'onde est constituée de vastes feuilles planes de force de champs uniforme (difficiles à dessiner). On donne le nom onde plane parce qu'un argument constant en (2.2) à tout moment décrit un plan, qui est perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Une onde plane remplit tout l'espace et peut-être pensée comme une série de feuilles infinies, chacune avec une force de champ uniforme différente, qui bougent dans la direction  $\mathbf{k}$ ."

## 2.2 Ondes planes (en notation) complexe

(p. 45) "A cette étape, récrivons notre onde plane solution avec la notation des nombres complexes (voir [nombres complexes](#)). Bien que ce changement de notation ne facilitera pas la tâche courante (et peut même apparaître comme une chose compliquée), nous introduisons la notation complexe ici en préparation pour les sections à suivre, où cela fera l'économie d'un travail considérable..."

En utilisant la notation complexe nous récrivons (2.2) comme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\left\{\tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\right\} \quad (2.8)$$

où nous avons caché le terme phase  $\phi$  à l'intérieur de  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  comme suit<sup>1</sup> :

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 \equiv \mathbf{E}_0 e^{i\phi} \quad (2.9)$$

<sup>1</sup> Nous avons assumé que chaque composante vectorielle du champ se propage avec la même phase. Pour être plus général, on pourrait écrire  $\tilde{\mathbf{E}}_0 = \hat{x} E_{0x} e^{i\phi_x} + \hat{y} E_{0y} e^{i\phi_y} + \hat{z} E_{0z} e^{i\phi_z}$

L'étape suivante que nous prenons est intentionnellement laxiste. A travers le monde les physicien-ne-s se sont mis-es d'accord pour éviter d'écrire  $\text{Re}[\ ]$  en un effort (ou son manque si vous préférez) de rendre les

expressions moins encombrées. Néanmoins, seule la partie réelle du champ a un sens physique bien que les expressions et calculs contiennent à la fois les termes réels et imaginaires. Cette notation laxiste est O.K puisque les parties réelles et imaginaires des nombres complexes ne sont jamais mêlées lorsqu'on additionne, soustrait, différencie ou intègre. On peut retarder la prise de la partie réelle de l'expression jusqu'à la fin des calculs. Aussi, lorsque la phase  $\phi$  est cachée à l'intérieur de l'amplitude du champ comme dans (2.8), on laisse tomber le tilde (tant qu'à faire puisque on est déjà laxiste); nous assumerons automatiquement que l'amplitude du champ est complexe et contient l'information de phase. En groupant tout cela, notre solution d'onde plane en notation complexe est écrite simplement :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.10)$$

Il est possible de construire n'importe quelle perturbation électromagnétique par une superposition linéaires de telles ondes...

▪ **Exemple 2.1** (p. 46)

Vérifiez que l'onde plane complexe (2.10) est une solution de l'équation d'onde (2.1)

- Solution: Le premier terme donne

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} &= \mathbf{E}_0 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ &= -\mathbf{E}_0 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= -k^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

et le deuxième terme donne

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.12)$$

Par insertion dans (2.1) nous obtenons la relation de dispersion dans le vide (2.5), qui spécifie la connexion entre le nombre d'onde  $k$  et la fréquence  $\omega$ .

## 2.3 Indice de réfraction

(p. 46) "Maintenant, examinons comment les ondes planes se comportent dans les **matériaux diélectriques (e.g. verre) où les électrons sont étroitement liés aux atomes ou molécules parents et ne sont pas libres de bouger dans le matériau** (on met en gras). On assume un matériau isotrope, homogène, et non conducteur (i.e.  $\mathbf{J}_{\text{free}} = 0$ ). Dans ce cas, on s'attend à ce que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  [polarisation introduit en section 1.6 eq. (1.29)] soient parallèles entre eux donc  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  (de 1.33 qui est  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$ ). L'équation d'onde générale pour le champ électrique (1.40) se réduit dans ce cas à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Puisque nous considérons des ondes sinusoidales, nous considérons des solutions (classiques) de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

notation complexe des ondes planes vue dans la section précédent, cela est pour, dans l'exemple de  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\} \quad (2.2)$$

sachant que  $\mathbf{E}_0$  dans (2.14) tient pour  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  amplitude complexe qui intègre la phase  $\phi$  (cf. annexe O.P. et [nombres complexes](#) §5)

En écrivant cela, nous faisons l'assomption (raisonnable) que **si un champ électrique ( $\mathbf{E}$ ) stimule un matériau à la fréquence  $\omega$ , alors la polarisation ( $\mathbf{P}$ ) dans le matériau oscillera aussi à la fréquence  $\omega$**  (on met en gras). Dans le cas général cette assomption est plutôt bonne sauf pour les champs électriques extrêmes... Rappelez-vous que par notre convention antérieure, les amplitudes complexes de  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{P}_0$  portent l'information de phase. Ainsi alors que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  dans (2.14) oscillent à la même fréquence, ils peuvent être déphasés l'un par rapport à l'autre. Cette divergence est la plus prononcée pour les matériaux qui absorbent de l'énergie à la fréquence de l'onde plane.

La substitution des solutions d'essai (2.14) dans (l'équation d'onde 2.13) donne

$$-k^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.15)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E} e^{i\phi}, \text{ or dérivées } (uv)' = uv' + vu' \rightarrow \mathbf{E} e^{i\phi} + 0 = \mathbf{E} e^{i\phi} ?$$

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2} \text{ donc } e^{i(kr - \omega t)} = e^{i kr} e^{i \omega t}, \text{ on sait que : } (e^x)' = \frac{d}{dx} e^x = e^x \text{ et } (e^{-x})' = -e^{-x}$$

mais aussi que  $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$ , en particulier  $(e^{cx})' = c e^{cx}$ .  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  est un scalaire dérivable sur  $x, y, z$ , alors que  $\omega t$  est dérivable sur le temps; il y a double dérivé, d'où  $k^2$  et  $\omega^2$ ...

Pour aller plus loin on a besoin d'établir une connexion explicite entre  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{P}_0$  (externe aux équations de Maxwell). Dans un matériau linéaire, **l'amplitude de polarisation est proportionnelle à la force du champ électrique appliqué** (on met en gras) :

$$\mathbf{P}_0(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) \quad (2.16)$$

$\epsilon$ , permittivité = mesure de la capacité d'un matériel à "attraper" de l'énergie électrique

Cela est connu comme la **relation constitutive**.

Nous avons introduit là un facteur de proportionnalité sans dimension  $\chi(\omega)$  (à déterminer) qui est appelé la **susceptibilité diélectrique**.

On prend en compte la possibilité que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  oscillent en déphasé en posant  $\chi(\omega)$  comme un nombre complexe.

Puisque  $\chi(\omega)$  dépend en général de la fréquence, il est approprié que nous voyons aussi  $\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{E}_0$  comme fonction de  $\omega$ .

En insérant (la relation constitutive 2.16) dans (2.15 équation d'onde avec les solutions d'essai) et faisant l'annulation des termes de champ ( $\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ), nous obtenons la **relation de dispersion dans les diélectriques** :

$$-k^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = -\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \chi(\omega) \\ k^2 = \epsilon_0 \mu_0 [1 + \chi(\omega)] \omega^2 \quad \text{ou} \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (2.17)$$

où nous avons utilisé  $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

$k$  dans le mouvement sinusoïdal défini classiquement comme le "nombre d'onde" =  $2\pi/\lambda$ . ( $k$  comme  $\lambda$  sont une mesure de la période spatiale, on peut utiliser l'un ou l'autre pour cela). On a dérivé ici la relation entre période spatiale et susceptibilité diélectrique  $\chi$  (relation prise comme dépendante de la fréquence)

La combinaison souvent utilisée  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$  est appelé la permittivité électrique du matériel; nous resterons ici avec l'écriture  $1 + \chi$ . En général,  $\chi(\omega)$  est un nombre complexe, ce qui **amène à un indice de réfraction complexe défini** par ( $n$ , nouveau paramètre défini/introduit pour la première fois ici) :

$$N(\omega) \equiv n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (2.18) \quad \text{et (2.30)}$$

où  $n$  et  $\kappa$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de l'indice. (Notez que  $\kappa$  n'est pas  $k$ ). D'après (2.17), la magnitude du vecteur d'onde est aussi complexe tel

$$k = \frac{N\omega}{c} = \frac{(n + i\kappa)\omega}{c} \quad (2.19)$$

Mais s'il vous plaît, gardez à l'esprit que l'utilisation d'un indice de réfraction complexe n'a de sens que dans le contexte d'une représentation complexe d'une onde plane.

L'indice complexe  $N$  prend en compte l'absorption tout comme il prend en compte le comportement oscillatoire habituel de l'onde. Nous voyons cela en plaçant explicitement (2.19) dans (2.14 solution classique d'essai d'ondes planes) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\kappa\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} e^{i\left(\frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - \omega t\right)} \quad (2.20)$$

Les parties imaginaires sont toujours classées séparément des parties réelles. Mais avant cela les règles ordinaires de l'algèbre s'appliquent, on a  $\left(i\left(\frac{n\omega}{c}\right) + i \times i\left(\frac{\kappa\omega}{c}\right)\right) \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - i(\omega t)$ , sauf que  $i \times i = -1$  (cf. [N. complexes](#)), ensuite

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$$

Comme avant,  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unité réel qui spécifie la direction de  $\mathbf{k}$ . De nouveau, lorsqu'on regarde (2.20), d'un accord spécial fait d'avance, nous devrions juste penser à la partie réelle, nommément

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\kappa\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} \cos\left(\frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi\right) \quad (2.21)$$

où une phase générale  $\phi$  était auparavant tenue dans le vecteur complexe  $\bar{\mathbf{E}}_0$  (le tilde avait été ôté).

$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{i\delta}$  par ailleurs de la formule de Euler (voir [nombres complexes §4](#))  $\cos \alpha$  est la partie réelle d'une onde sinusoïdale en notation complexe :  $e^{i\alpha}$ , (ici  $\alpha = \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ ), i.e. dernier terme de (2.20); enfin

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2} \quad \text{d'où la réintégration de la phase } \delta.$$

La Figure 2.3 montre un graphe de (2.21)

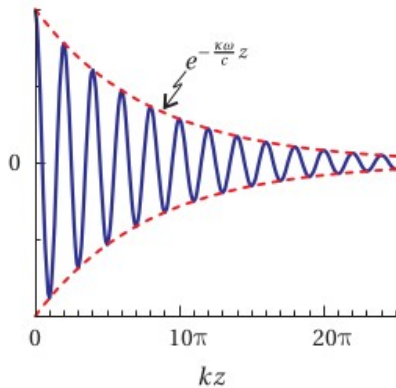


Figure 2.3 Champ électrique d'une onde plane qui décline. Pour le coté pratique du dessin, la direction de propagation est choisie comme étant dans la direction  $z$  (i.e.  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ ).

La partie imaginaire de l'indice complexe (i.e.  $\kappa$ ) décrit comment l'onde décline pendant son voyage. Cela rend compte de l'absorption. La partie réelle de l'indice complexe (i.e.  $n$ ) est associée elle avec l'oscillation de l'onde. Par inspection de l'argument du cosinus de (2.21), nous voyons que la vitesse du front d'onde sinusoïdale (en déclin) est

$$v_{\text{phase}}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \quad \text{donc} \quad n(\omega) = \frac{c}{v_{\text{phase}}(\omega)} \quad (2.22)$$

Ainsi,  $n(\omega)$ , l'indice de réfraction, est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur la vitesse de l'onde dans le matériel.

Dans un matériel diélectrique, les relations du vide (2.3 qui est  $\mathbf{k} \equiv k \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}} \hat{\mathbf{u}}$ ) et (2.4 qui est  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_{\text{vide}}}$ ) sont modifiées pour lire

$$\text{Re}\{\mathbf{k}\} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.23)$$

où :

$$\lambda \equiv \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n} \quad (2.24)$$

Tandis que la fréquence  $\omega$  est la même, que ce soit dans un matériel ou dans le vide, la longueur d'onde  $\lambda$  varie avec la partie réelle de l'indice complexe.

(comme par définition vitesse de propagation = fréquence  $\times$  longueur d'onde, la vitesse n'est pas la même dans le vide et dans un matériau solide)

▪ **Exemple 2.2** (p. 4)

Quand  $n = 1,5$ ,  $\kappa = 0,1$ , et  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Hz, trouvez, a) la longueur d'onde à l'intérieur du matériel et b) la distance de propagation sur laquelle l'amplitude de l'onde diminue du facteur  $e^{-1}$  (appelé la *profondeur de peau*).

- Solution : a)

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n} = \frac{2\pi c}{n\omega} = \frac{c}{n\nu} = \frac{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{1,5(5 \cdot 10^{14} \text{ Hz})} = 400 \text{ nm} \quad (= \text{violet})$$

b)

$$e^{-\frac{\kappa\omega}{c}z} = e^{-1} \Rightarrow z = \frac{c}{\kappa\omega} = \frac{c}{2\pi\kappa\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\pi(0,1)(5 \cdot 10^{14} \text{ Hz})} = 950 \text{ nm} \quad (> 2\lambda)$$

$$\text{amplitude} = (2.21), \quad -\frac{\kappa\omega}{c}z = -1$$

**Obtenir  $n$  et  $\kappa$  de la susceptibilité diélectrique complexe**

De (2.18 qui est  $N(\omega) \equiv n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$ ) nous avons

$$(n + i\kappa)^2 = n^2 - \kappa^2 + i2n\kappa = 1 + \text{Re}\{\chi\} + i \text{Im}\{\chi\} = 1 + \chi \quad (2.25)$$

Les parties réelles et les parties imaginaires de l'équation ci-dessus sont égales séparément :

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \text{Re}\{\chi\} \quad \text{et} \quad 2n\kappa = \text{Im}\{\chi\} \quad (2.26)$$

De la dernière équation nous avons

$$\kappa = \text{Im}\{\chi\} / 2n \quad (2.27)$$

Quand cela est substitué dans la première équation de (2.26) nous obtenons un quadratique en  $n^2$

$$n^4 - (1 + \text{Re}\{\chi\}) n^2 - \frac{(\text{Im}\{\chi\})^2}{4} = 0 \quad (2.28)$$

La racine réelle positive des cette équation est

$$n = \frac{\sqrt{(1 + \text{Re}\{\chi\}) + \sqrt{(1 + \text{Re}\{\chi\})^2 + (\text{Im}\{\chi\})^2}}{2} \quad (2.29)$$

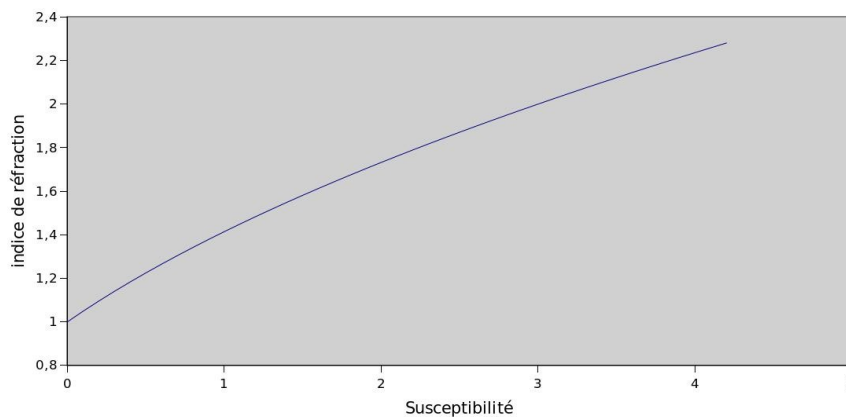
La partie imaginaire de l'indice est alors obtenue de (2.27).

- fin de "Obtenir n et  $\kappa$  de la susceptibilité diélectrique complexe -

Quand l'absorption est petite... ( $n$ , **l'indice de réfraction**) se réduit à (i.e. de 2.18)

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (2.30)$$

Relation que l'on peut mettre en graphique :



## 2.4 Le modèle de Lorentz des diélectriques (p. 49)

"Pour calculer l'indice de réfraction... **on a besoin d'un modèle qui décrit la réponse des électrons dans le matériel à l'onde du champ électrique qui passe (on met en gras)**. Bien sûr le modèle à son tour influence comment le champ électrique se propage, ce qui est d'abord ce qui influence le matériel ! Par conséquent le modèle doit être résolu ensemble avec le champ qui se propage d'une manière self-consistante.

Hendrik Lorentz a développé un modèle à la fin des années 1880s qui a eu beaucoup de succès. Il traite chaque électron (actif) dans le matériau comme une particule classique qui obéit à la deuxième loi de Newton ( $F = m \mathbf{a}$ ). Dans le cas d'un matériau diélectrique, les électrons sont sujet à **une force élastique de restauration** qui tient chaque électron lié à sa molécule respective et une force d'atténuation qui dissipe l'énergie et donne lieu à de l'absorption (on met en gras).

Bekefi et Barrett (1977, p. 398-9) :

"... lorsque nous arrivons à des problèmes qui impliquent des champs en présence de matière, une spécification complète de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en termes de charges individuelles (et courants) serait impossible; un centimètre cube de matière contient quelque chose comme  $\sim 10^{19}$  à  $\sim 10^{24}$  charges, chacune soumise à des mouvements compliqués provoqués par l'agitation thermique des molécules. Heureusement, dans bien des problèmes d'intérêt, on ne demande pas les détails microscopiques détaillés des champs électriques et magnétiques mais sur des petits volumes d'éléments  $\Delta V$ . En faisant la moyenne sur des régions de dimension caractéristiques du  $\mu\text{m}$  ( $\Delta V \sim 10^{-12} \text{ cm}^3$ ) ou plus grand, on englobe 10 milliards ou plus de molécules, ce qui est suffisant pour moyennner la plupart des fluctuations microscopiques."

"... niveau macroscopique dans lequel l'interaction est décrite en termes de certaines quantités phénoménologique de grande échelle qui expriment la réponse en gros du matériau à une perturbation électromagnétique (la conductivité électrique d'un métal ou la l'indice de réfraction dans un diélectrique sont deux tels paramètres). En regardant ces quantités comme connues d'expérimentation, par exemple, leur grande vertu est dans le fait qu'elles peuvent être facilement incorporées dans les équations de Maxwell et alors manipulées par quelques règles simples. En les utilisant, nous obtenons de l'information sur les interactions des

radiations électromagnétiques avec la matière en gros. Puisque ces quantités macroscopiques sont indépendantes de modèles, elles ont un sens dans le contexte classique aussi bien que dans celui de mécanique quantique. Le but ultime de la théorie est d'établir la connexion nécessaire entre le monde macroscopique mesurable et l'équation détaillée de mouvement des oscillateurs atomiques constitutifs, dans la limite où nous les comprenons."

Le modèle de Lorentz détermine la **susceptibilité diélectrique**  $\chi(\omega)$  (la connexion entre les champ électrique  $\mathbf{E}_0$  et la polarisation  $\mathbf{P}_0$ ) et donc l'indice de réfraction (comme vu dans la section précédente). Le modèle assume que toutes les molécules du matériau sont identiques, chacune avec un (ou quelques) électrons actifs qui répondent au champ extérieur. Les atomes sont distribués de manière uniforme dans l'espace avec  $N$  électrons actifs identiques par volume (unités : nombre par volume). La polarisation du matériel est alors :

$$\mathbf{P} = N q_e \mathbf{r}_e \quad (2.31)$$

Rappelez-vous que la polarisation a des unités de dipôles par volume. Chaque dipôle a la force  $q_e \mathbf{r}_e$ , où  $\mathbf{r}_e$  est un déplacement microscopique de l'électron de son état d'équilibre. (...) De notre point de vue moderne de mécanique quantique,  $\mathbf{r}_e$  correspond à un déplacement moyen du nuage électronique qui entoure le noyau (voir Fig. 2.4)

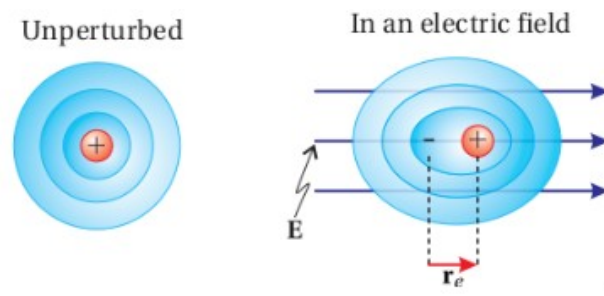


Fig. 2.4. Un nuage électronique déformé devient un dipôle

Le déplacement  $\mathbf{r}_e$  de la charge d'électron dans un atome individuel dépend de la force locale du champ électrique appliqué  $\mathbf{E}$  à la position de l'atome. Puisque le diamètre du nuage électronique est tout petit par comparaison à la longueur d'onde de la lumière (visible), on fait l'approximation que le champ électrique est uniforme sur la distance de tout atome individuel.

Le modèle de Lorentz utilise l'équation du mouvement de Newton pour décrire le déplacement d'un électron de son équilibre dans un atome. En accord avec la loi classique du mouvement, la masse de l'électron  $m_e$  fois l'accélération (notée par deux points au dessus du "r") est égale à la somme des forces sur l'électron :

$$m_e \ddot{\mathbf{r}}_e = q_e \mathbf{E} - m_e \gamma \dot{\mathbf{r}}_e - k_{Hooke} \mathbf{r}_e \quad (2.32)$$

Le champ électrique tire sur l'électron avec la force  $q_e \mathbf{E}$ <sup>8</sup>.

<sup>8</sup> l'électron est aussi soumis à une force due au champ magnétique de la lumière,  $F = q_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$ , mais cette force est toute petite pour des champs optiques typiques.

Une force de frottement (ou friction) -  $m_e \gamma \dot{\mathbf{r}}_e$  s'oppose au mouvement de l'électron et prend en compte l'absorption d'énergie. Sans ce terme il est seulement possible de décrire l'indice optique à des fréquences éloignées de celles où l'absorption se produit. Enfin, -  $k_{Hooke} \mathbf{r}_e$  est une force qui prend en compte le fait que l'électron est lié au noyau. La force de restauration peut être imaginée comme un ressort effectif qui tire l'électron déplacé vers son état d'équilibre avec une force proportionnelle au déplacement, aussi ce terme est essentiellement la loi de Hooke familière (en mécanique : déformation = contrainte divisée par le module élastique). Avec des réarrangements, (2.32) peut être écrit comme :

$$\ddot{\mathbf{r}}_e + \gamma \dot{\mathbf{r}}_e + \omega_0^2 \mathbf{r}_e = \frac{q_e}{m_e} \mathbf{E} \quad (2.33)$$

où  $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k_{Hooke}}{m_e}}$

est la fréquence d'oscillation naturelle (ou la fréquence de résonance) associée avec la masse de l'électron et la 'constante de ressort'.

Ils développent alors des formes complexes liées à ce modèle.

(...)

(p. 52) Lorentz a introduit son modèle bien avant le développement de la mécanique quantique. Bien que **le modèle** ne s'occupe pas de la physique quantique, il **fonctionne surprenamment bien** (on met en gras) **pour décrire les indices optiques dépendant de la fréquence** et l'absorption de la lumière. Il se trouve que l'équation de Schrödinger appliquée à deux niveaux dans un atome se réduit en forme mathématique au modèle de Lorentz dans la limite de la lumière de basse intensité. La mécanique quantique aussi explique la force d'oscillation, qui, avant le développement de la mécanique quantique devait être inséré ad hoc pour que le modèle soit en phase avec les expérimentations. Il apparaît que le terme friction,  $\gamma$ , n'est pas associé avec quelque chose d'interne aux atomes mais plutôt avec les collisions entre atomes, qui en moyenne donne un même comportement."

Ils traitent ensuite des matériaux conducteurs (...)

Mécanique quantique qui pose bien des problèmes d'interprétation, comment peut-être onde quantique et particule classique ? Schrödinger en 1935 avait posé ce problème par l'histoire d'un chat dans une boîte et : "Le physicien Roland Omnès en donne une analogie plus physique : quand une onde lumineuse entre dans un milieu transparent (du verre ou de l'eau), toutes les molécules émettent des ondelettes qui interfèrent pour ne laisser subsister qu'une seule onde réfractée qui se propage plus lentement. Il y a partout des interférences mutuellement destructives entre les ondelettes, sauf pour une onde macroscopique qui subsiste." (Ortoli et Pharabod p. 135), et encore s'agit-il là du cas simple d'un matériel isotrope...

## 2.6. Le théorème de Poynting (p. 54)

"Jusque là nous avons décrit la lumière comme la propagation d'une perturbation électromagnétique. Cependant en général **nous observons la lumière en détectant l'énergie absorbée** plutôt que le champ d'amplitude directement (on met en gras). Dans cette section on examine la connexion entre les champs électromagnétiques qui se propagent (telles que les ondes planes traitées dans ce chapitre) et l'énergie transportée par de tels champs.

A la fin des des années 1800s John Poynting a développé (à partir des équations de Maxwell) la fondation théorique qui décrit le transport de l'énergie lumineuse. Vous devriez apprécier et vous rappeler des idées impliquées, particulièrement la définition et la signification du vecteur de Poynting, même si vous oubliez les spécificités de sa dérivation.

McCall et al (2015 p. 21) : "On peut montrer de la théorie de l'électrostatique que la densité d'énergie  $\epsilon_0 \epsilon E^2/2$  est associée avec un champ électrique dans un milieu diélectrique isotrope, et de manière similaire, un champ magnétique qui agit seul, produit une densité d'énergie de  $\mu\mu_0 H^2/2$  dans un milieu magnétique isotrope. Notez que pour une onde électromagnétique,  $\epsilon_0 \epsilon E^2/2 = \mu\mu_0 H^2/2$  parce que  $E = vB$  et  $v = 1/\sqrt{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0}$ .

Les ondes électromagnétiques qui voyagent dans le vide transportent de l'énergie dans la direction de propagation et l'écoulement d'énergie est partagé entre les champs électrique et magnétique. Le vecteur de Poynting donne les deux, et la direction d'écoulement, et le taux d'écoulement total instantané par unité de surface normale à la direction d'écoulement. Pour les champs réels il a la forme générale :  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ ."

### Dérivation du théorème de Poynting

Nous n'avons besoin que de deux des équations de Maxwell : (1.3) [Loi de Faraday] et (1.4) [Loi d'Ampère révisée]. On prend le produit scalaire de  $\mathbf{B}/\mu_0$  avec la première équation et le produit scalaire de  $\mathbf{E}$  avec la deuxième équation. Alors, en soustrayant la seconde équation de la première on obtient (opérations faites sur les deux cotés de (1.3) et (1.4) égalisées) :

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \left( \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) + \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (2.49)$$

Les deux premiers termes peuvent être simplifiés en utilisant l'identité de vecteurs P0.8.

P0.8 (p. 20) :  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$  i.e.  $\mathbf{g} = \mathbf{B}/\mu_0$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{E}$

Les deux termes suivants sont la dérivée par rapport au temps de  $\epsilon_0 E^2/2$  et  $B^2/2\mu_0$ , respectivement (si  $y = x^2$ ,  $dy/dx = 2x$ ; si  $dy/dx = x$  alors  $y = x^2/2$ ). La relation (2.49) devient :

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (2.50)$$

C'est le théorème de Poynting. Chaque terme dans cette équation a des unités de puissance par volume. Il est pratique d'écrire le théorème de Poynting comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_{\text{champ}} + \mathbf{u}_{\text{matériau}}) = 0 \quad (2.51)$$

où :

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (2.52)$$

est appelé le vecteur de Poynting, qui à l'unité de puissance par surface (watt/m<sup>2</sup>), appelé irradiancie (vecteur flux par unité de surface de toute perturbation électromagnétique).

- Yariv et Yeh (1984, p. 6) le présente ainsi : "Le vecteur  $\mathbf{S}$ , qui représente l'écoulement d'énergie, est appelée le vecteur de Poynting et a la dimension de joules par mètre carrés par seconde. Il est conforme de voir  $|\mathbf{S}|$  comme la puissance par unité de surface (watt/m<sup>2</sup>) portée par le champ dans la direction de  $\mathbf{S}$ . La quantité  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  ainsi représente la puissance électromagnétique nette qui s'écoule d'une unité de volume."
- Et Scharf (2007, p. 22) : "Comme les champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique oscillent, la magnitude du vecteur de Poynting change avec le temps. La magnitude moyenne sur un temps  $T$  long (plus long que la période de l'onde) est appelée irradiancie,  $I$  :

$$I = \langle S \rangle_T$$

L'expression

$$u_{\text{champ}} \equiv \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (2.53)$$

est l'énergie par volume stockée dans les champs électrique et magnétique. Les dérivations de la densité d'énergie du champ électrique et de la densité d'énergie du champ magnétique sont données en annexes 2.C et 2D. (voyez (2.80) et (2.87) [on a mis ces annexes ci-dessous à la fin de cette partie I]). La dérivée

$$\frac{\partial u_{\text{matériau}}}{\partial t} \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (2.54)$$

décrit la puissance par volume délivrée du champ au matériau. L'équation (2.54) rappelle la loi familière de la puissance de circuit, Puissance = voltage × courant. La puissance est délivrée lorsqu'une particule chargée traverse une distance alors qu'elle subit une force. Cela se produit quand des courants passent en présence d'un champ électrique.

Le théorème de Poynting est essentiellement une déclaration de la conservation d'énergie, ou  **$\mathbf{S}$  décrit l'écoulement d'énergie** (on met en gras). Pour le piger, considérez le théorème de Poynting (2.51) intégré sur un volume  $V$  (entouré par la surface  $S$ ). Si l'on applique aussi le théorème de divergence (0.11 qui est

$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv$  vu plus haut en chap. 0) sur le terme impliquant  $\nabla \cdot \mathbf{S}$ , on obtient

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V (u_{\text{champ}} + u_{\text{matériau}}) \, dv \quad (2.55)$$

Remarquez que l'intégrale de volume sur les densités d'énergie  $u_{\text{champ}}$  et  $u_{\text{matériau}}$  donne l'énergie totale stockée dans  $V$ , qu'elle soit sous la forme de densité d'énergie du champ électromagnétique ou comme densité d'énergie qui a été donnée au matériau. L'intégration du vecteur de Poynting sur la surface [partie gauche de (2.55)] donne le flux net du vecteur de Poynting dirigé vers l'extérieur. L'équation (2.55) indique que le flux vers l'extérieur du vecteur de Poynting équivaut au taux de disparition d'énergie totale de l'intérieur de  $V$ . De même si le vecteur de Poynting est dirigé vers l'intérieur (négatif), alors le flux net vers l'intérieur d'énergie vaut le taux d'accroissement d'énergie dans  $V$ . **Le vecteur  $\mathbf{S}$  définit l'écoulement d'énergie à travers l'espace. Son unité de puissance par surface [watt/m<sup>2</sup>] est juste ce qu'il faut pour décrire l'éclat de la lumière frappant/affectant une surface.** (on met en gras)

## Chapter 5 Propagation dans les milieux anisotropes

p. 121 :

"A ce point, nous n'avons vu que les matériaux isotropes ou la susceptibilité diélectrique  $\chi(\omega)$  (et donc l'indice de réfraction  $n$ ) est la même pour toutes les directions de propagation et polarisations. Dans les matériaux anisotropes, tels les cristaux, la lumière peut rencontrer un indice de réfraction différent qui dépend de l'alignement (i.e. polarisation) du champ électrique  $\mathbf{E}$ . Cette différence dans l'indice de réfraction se produit quand **la direction et la force des dipôles induits dépend de la structure du maillage du matériel en addition au champs qui se propage** (on met en gras). Les propriétés uniques des matériaux anisotropes en font des éléments importants dans de nombreux systèmes optiques.

En section 5.1 on discute sur comment connecter  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  dans un matériau anisotrope en utilisant un tenseur de susceptibilité diélectrique. En section 5.2, on applique les équations de Maxwell à l'onde plane qui voyage dans un cristal. Les analyses aboutissent à **l'équation de Fresnel, qui rattache les composantes du vecteur**

**k aux composantes du tenseur de susceptibilité.** Dans la section 5.3 on applique l'équation de Fresnel à un cristal uniaxe (e.g. quartz, saphir) ou  $\chi_x = \chi_y \neq \chi_z$ . Dans le contexte d'un cristal uniaxe, on montre que le vecteur de Poynting (**S**) et le vecteur **k** ne sont en général pas parallèles.

Plus d'un siècle avant Fresnel, Christian Huygens avait décrit la biréfringence dans les cristaux avec succès en utilisant l'idée d'ondelettes elliptiques. Sa méthode donne la direction du vecteur de Poynting associée avec le rayon extraordinaire dans un cristal. C'est Huygens qui a estampé le terme rayon extraordinaire puisque dans les matériaux biréfringents l'un des rayons apparaît ne pas obéir la loi de Snell.

ou Snellius, qui a exposé la loi de réfraction entre 2 milieux dans un manuscrit en 1621 :  $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$  que les ouvrages français appellent loi de Descartes parce que ce dernier l'a diffusée via son *Discours de la méthode* en 1637.

En fait, le vecteur **k** obéit toujours à la loi de Snell, mais  **dans un cristal, le vecteur k pointe dans une direction différente du vecteur de Poynting, qui donne l'énergie vue par un observateur...**  (on met en gras)

## 5.1. Relation constitutive dans les cristaux

"**Dans un cristal anisotrope, l'asymétrie dans le maillage peut faire que la polarisation P du milieu réponde dans une direction différente du champs électrique E** (i.e.  $\mathbf{P} \neq \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ) (on met en gras).

Cependant, aux basses intensités, la réponse des matériaux est encore linéaire (ou proportionnelle) à la force du champ électrique. La relation constitutive linéaire qui connecte **P** et **E** dans un cristal peut être exprimée dans la forme la plus générale comme :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La matrice en 5.1 est appelée le **tenseur de susceptibilité diélectrique**. Pour visualiser le comportement des électrons dans un tel matériel, **on imagine chaque électron comme lié par de minuscules ressorts avec des forces différentes dans différentes directions** pour représenter l'anisotropie (voir Fig. 5.1) (on met en gras).

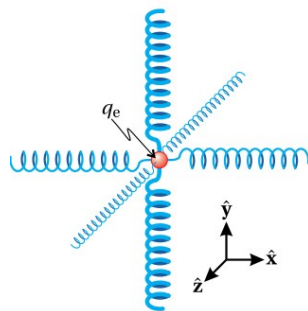


Figure 5.1 Modèle physique d'un électron pris dans un réseau cristallin, avec le système de coordonnées choisi spécialement le long de l'axe principal afin que le tenseur de susceptibilité prenne une forme simple

Lorsqu'un champs extérieur est appliqué l'électron est soumis à une force qui le déplace de sa position d'équilibre. Les 'ressorts' (en fait la force électrique des ions liés dans le réseau cristallin) exercent une force de restauration, mais **la force de restauration n'est pas la même dans toutes les directions** - l'électron a tendance à se déplacer plus le long de la dimension du ressort le plus faible. **L'électron déplacé crée un dipôle microscopique, mais la force de restauration asymétrique fait que P est dans une direction différente de E** comme dessiné en Fig. 5.2 (on met en gras).

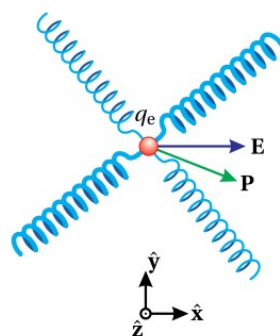


Figure 5.2 Le champ **E** appliqué et la polarisation induite **P** en général ne sont pas parallèles dans un réseau cristallin

Pour comprendre l'interprétation géométrique des plusieurs coefficients  $\chi_{ij}$ , assumez, par exemple, que le champ électrique est dirigé le long de l'axe x (i.e.  $E_y = E_z = 0$ ) comme dessiné en Fig. 5.2. Dans ce cas, les trois équations de (5.1) se réduisent à :

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 \chi_{xx} E_x \\ P_y &= \epsilon_0 \chi_{yx} E_x \\ P_z &= \epsilon_0 \chi_{zx} E_x \end{aligned}$$

Notez que le coefficient  $\chi_{xx}$  connecte  $\mathbf{P}$  dans la direction  $\hat{\mathbf{x}}$  avec la force de  $\mathbf{E}$  dans cette même direction, juste comme dans le cas isotrope. Les deux autres coefficients ( $\chi_{yz}$  et  $\chi_{zx}$ ) décrivent la quantité de polarisation  $\mathbf{P}$  produite dans les directions  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  par la composante du champ électrique dans la dimension x [forcée donc par le rappel asymétrique relatif à  $\mathbf{E}$ ]. De même, les autres coefficients avec les indices mixtes dans (5.1) décrivent la contribution à  $\mathbf{P}$  dans une dimension faite par la composante d'un champ électrique dans une autre dimension.

Comme vous pouvez l'imaginer, travailler avec neuf coefficients de susceptibilité peut devenir compliqué. Heureusement, on peut grandement réduire cette complexité de la description par un choix judicieux du système de coordonnées. En annexe 5.A on explique comment la conservation d'énergie demande que le **tenseur de susceptibilité** (5.1) pour les cristaux non absorbants typiques soit **réel et symétrique** (i.e.  $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ ).

annexe 5-A p. 132 non reprise ici; ils passent par la force et le travail sur un électron, qui doit être le même quelque soit le trajet si le matériau n'est pas absorbant. Calculant le travail sur deux chemins différents aboutissant au même point, travail qui doit être le même, ils déduisent que la matrice des "ressorts" d'où celle des susceptibilité doit être symétrique.

L'annexe 5.B montre que, étant donné un tenseur réel symétrique, il est toujours possible de choisir un système de coordonnées dans lequel les éléments hors-diagonales disparaissent.

Annexe 5.B, p. 133-4 non reprise ici. C'est un travail sur matrices, On sait en algèbre matriciel que lorsque la transpose d'une matrice est égale à son inverse :  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$  (dites *orthogonales*) si l'on fait une *transformation linéaire* (dite aussi *orthogonale* de type  $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y}$ ) cela préserve la longueur de tout vecteur et l'angle entre deux vecteurs quelconques = c'est une rotation ([ici](#) § IV-12-1 et 2). Eux font une rotation arbitraire dans les 3 direction (angles  $\alpha, \beta, \gamma$ ) via une matrice  $\mathbf{R}$  ( $\mathbf{E}' = \mathbf{R}\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{P}' = \mathbf{R}\mathbf{P}$ ), qui est *orthogonale*. Ils arrivent à  $\chi' = \mathbf{R} \chi \mathbf{R}^{-1}$ , et : "nous pouvons les rendre tous les trois [les éléments hors diagonale symétriques] égaux à zéro puisque nous avons trois degrés de liberté avec les angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Cela justifie (5.3)."

Cela est vrai même si les plans du réseau dans le cristal ne sont pas mutuellement orthogonaux (e.g. rhomboédrique, hexagonal, etc.). Nous imaginerons que cette rotation des coordonnées a été accomplie. En d'autres termes on peut laisser le cristal dicter lui-même l'orientation du système de coordonnées, aligné sur les axes principaux du cristal pour lequel les éléments hors-diagonale de (5.1) sont zéro.

Avec le système de coordonnées alignées sur les axes principaux, la relation constitutive pour un cristal non absorbant se simplifie à

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_x & 0 & 0 \\ 0 & \chi_y & 0 \\ 0 & 0 & \chi_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

ou, sans la notation en matrice (puisque'elle n'offre plus d'intérêt)

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{x}} \epsilon_0 \chi_x E_x + \hat{\mathbf{y}} \epsilon_0 \chi_y E_y + \hat{\mathbf{z}} \epsilon_0 \chi_z E_z \quad (5.3)$$

en assumant que  $\chi_x, \chi_y$  et  $\chi_z$  sont tous réels (nous avons laisser tomber l'indice double;  $\chi_x$  est pour  $\chi_{xx}$ , etc.)"

## 5.2 Propagation d'une onde plane dans un cristal

(p. 123) "On considère une onde plane avec la fréquence  $\omega$  qui se propage dans un cristal. De manière similaire à nos analyses précédentes d'ondes planes qui se propagent dans des matériaux isotropes, nous écrivons des équations proposées

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

= notation complexe d'ondes planes sinusoïdales classiques (voir [N. complexes](#) §5), exemple de  $\mathbf{E}$  de (2.2) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\}$$

comme vu en section 2.2 :  $\mathbf{E}_0$  (et ici  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{P}_0$ ) dans (5.4) tenant pour  $\tilde{\mathbf{E}}$  amplitude complexe qui intègre la phase  $\phi$ . où les restrictions sur  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{k}$  restent à être déterminées. Comme d'habitude, la phase de chaque onde est incluse dans les amplitudes  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{P}_0$ , tandis que  $\mathbf{k}$  est réel en accord avec notre supposition qu'il n'y a pas d'absorption.

On peut faire une observation rapide sur le comportement de ces champs en appliquant les équations de Maxwell directement. La loi de Gauss pour les champs électriques (1.33) qui est  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$  demande

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{k} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \quad (5.5)$$

propriétés impliquant  $\nabla$  :  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$

$\nabla \cdot \mathbf{E} \epsilon_0 + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  (Maxwell, qui ne sont pas complexes) devient  $\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0$  ,

▪ Reitz et al. (1979 p. 360) précisent : "Cette substitution [de (5.4) dans les équations de Maxwell] imposera des conditions que les constantes supposées,  $\mathbf{k}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$ , etc., auront à satisfaire de façon que les fonctions d'ondes planes seront vraiment solutions des équations de Maxwell...

En différenciant une fonction de la forme  $\bar{\mathbf{E}} e^{-i\omega t}$  en respect à  $t$ , on voit que l'opérateur  $\partial/\partial t$  est  $\partial/\partial t = -i\omega$ . De même, on trouve... que pour une fonction de la forme  $\bar{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , l'opérateur  $\nabla$  est :

$$\nabla = i \mathbf{k} "$$

Nota : propriété des exponentielles :  $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$ , d'où on montre (ici § V) que :

opérateur	sous forme complexe
$\frac{\partial}{\partial t}$	$-i\omega$
$\nabla$	$i \mathbf{k}$

Donc  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  devient  $-i \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}}$ , etc.

- Cela fait écrire à Chartier (2003, p. 150), après avoir donné la notation complexe de l'équation classique d'onde sinusoïdale : "Pour ce type particulier d'ondes, les équations de Maxwell ne sont plus des relations entre les opérateurs fonctionnels rotationnel, gradient, divergence..., mais elles se ramènent à des produits vectoriels et scalaires", il donne, notamment :  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$  et  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

- Reitz et al. (p.360) : "Ainsi les équations de Maxwell deviennent pour les ondes planes (après que  $i$  et l'exponentiel soient supprimés) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{D}}) &= \mathbf{k} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{B}} &= 0 " \end{aligned}$$

- fin des précisions par Reitz & al., Fouchet et Chartier -

(suite/retour à :) Peatross & Ware :

et la loi de Gauss pour le magnétisme (1.34 s qui est  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) donne

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.6)$$

On remarque immédiatement la particularité suivante : De sa définition, le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$  est perpendiculaire et à  $\mathbf{E}$  et à  $\mathbf{B}$  (produit vectoriel), et par (5.6) le vecteur  $\mathbf{k}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  (produit scalaire :  $\cos 90 = 0$ ). Cependant, par (5.5) le vecteur  $\mathbf{k}$  n'est pas nécessairement perpendiculaire à  $\mathbf{E}$ , puisque en général  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$  si  $\mathbf{P}$  (des dipôles microscopiques du modèle de matériau, qui réagissent à  $\mathbf{E}$ , mais pas sur le même plan à cause de leur organisation) pointe dans une direction autre que  $\mathbf{E}$ . Donc  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{S}$  ne sont pas nécessairement parallèles dans un cristal (à cause de la nature de ce dernier). En d'autres mots, **l'écoulement d'énergie et la direction de la propagation du front de phase peuvent être différents dans un matériau anisotrope.** (on met en gras)

Notre but principal est de faire la relation entre le vecteur  $\mathbf{k}$  et les paramètres de susceptibilité  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  et  $\chi_z$ .

Pour le faire , on met nos champs d'onde plane d'essai dans l'équation d'onde (1.40). En assumant que  $J_{\text{free}} = 0$  on a :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (5.7)$$

= équation d'onde pour le champ vecteur  $\mathbf{E}$ .

### Dérivation de la relation de dispersion dans les cristaux (p. 124)

On commence en substituant la solution d'essai (5.4) dans l'équation d'onde (5.7). Après avoir réalisé les dérivations on trouve

$$k^2 \mathbf{E} - \omega^2 \mu_0 (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.8)$$

Insérer la relation constitutive (5.3) pour les cristaux dans (5.8) donne

$$k^2 \mathbf{E} - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 [(1 + \chi_x) E_x \hat{\mathbf{x}} + (1 + \chi_y) E_y \hat{\mathbf{y}} + (1 + \chi_z) E_z \hat{\mathbf{z}}] = \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.9)$$

Cette relation n'est pas commode à cause du mélange des composantes du champ électrique dans l'expression. Cela n'était pas un problème lorsqu'on étudiait les matériaux isotropes pour lesquels le vecteur  $\mathbf{k}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{E}$ , donnant le coté droit des équations zéro. Mais il y a une astuce pour s'occuper de ce problème.

La relation (5.9) en fait contient trois équations, une pour chaque dimension. De manière explicite ces équations sont

$$\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_x) \right] E_x = k_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.10)$$

$$\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_y) \right] E_y = k_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.11)$$

$$\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_z) \right] E_z = k_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.12)$$

Nous avons remplacé les constantes  $\mu_0 \epsilon_0$  avec  $1/c^2$  en accord avec (1.42). On multiplie (5.10)-(5.12) respectivement par  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  et aussi déplaçons le facteur entre crochets dans chaque équation au numérateur du coté droit. Alors, en additionnant les trois équations ensemble on obtient

$$\frac{k_x^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_x) \right]} + \frac{k_y^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_y) \right]} + \frac{k_z^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_z) \right]} = k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.13)$$

Maintenant  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$  apparaît dans chaque terme et peut être supprimé par division. Cela donne la relation de dispersion (sans la gêne des composantes de champ) :

$$\frac{k_x^2}{\left[ k^2 c^2 / \omega^2 - (1 + \chi_x) \right]} + \frac{k_y^2}{\left[ k^2 c^2 / \omega^2 - (1 + \chi_y) \right]} + \frac{k_z^2}{\left[ k^2 c^2 / \omega^2 - (1 + \chi_z) \right]} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (5.14)$$

En touche finale nous avons multiplié l'équation par  $\omega^2/c^2$ .

- fin de la Dérivation de la relation de dispersion -

"La relation de dispersion (5.14) nous permet de trouver un  $\mathbf{k}$  qui convient, étant données les valeurs pour  $\omega$ ,  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  et  $\chi_z$ . En fait elle ne fait que donner une restrictions sur la magnitude de  $\mathbf{k}$ ; on doit encore décider sur la direction de voyage de l'onde (i.e. nous devons choisir les rapports entre  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$ ). Pour se rappeler de ce fait, nous introduisons un vecteur unité qui pointe dans la direction de  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} = k (u_x \hat{\mathbf{x}} + u_y \hat{\mathbf{y}} + u_z \hat{\mathbf{z}}) = k \hat{\mathbf{u}} \quad (5.15)$$

Ce vecteur unité introduit, la relation de dispersion (5.14) pour les ondes plan dans un cristal devient

$$\frac{u_x^2}{\left[ k^2 c^2 / \omega^2 - (1 + \chi_x) \right]} + \frac{u_y^2}{\left[ k^2 c^2 / \omega^2 - (1 + \chi_y) \right]} + \frac{u_z^2}{\left[ k^2 c^2 / \omega^2 - (1 + \chi_z) \right]} = \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \quad (5.16)$$

On peut définir un **indice de réfraction**,  $n$ , comme le **rapport de la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  à la vitesse de la phase de propagation dans un matériel  $\omega/k$ ...** (on met en gras)

$$\text{vitesse de la lumière : } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{vitesse dans le media } v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad \text{et } n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

la variation de  $n$  avec la fréquence donne lieu au phénomène bien connu de la dispersion en optique (ex. prisme)

La relation introduite pour les matériaux isotropes (2.19)... reste appropriée. C'est

$$n = \frac{k c}{\omega} \quad (5.17)$$

Cette relation familière entre  $k$  et  $\omega$ , dans le cas d'un cristal, dépend de la direction de propagation...

Inspirés par (2.30 qui est  $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$ ) on trouvera utile d'introduire plusieurs paramètres d'indice de réfraction :

$$\begin{aligned} n_x &\equiv \sqrt{1 + \chi_x} \\ n_y &\equiv \sqrt{1 + \chi_y} \\ n_z &\equiv \sqrt{1 + \chi_z} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Avec ces définitions (5.17)-(5.18), la relation de dispersion (5.16) devient

$$\frac{u_x^2}{(n^2 - n_x^2)} + \frac{u_y^2}{(n^2 - n_y^2)} + \frac{u_z^2}{(n^2 - n_z^2)} = \frac{1}{n^2} \quad (5.19)$$

Cela est appelé l'**équation de Fresnel**... La relation contient l'indice  $n$  encore inconnu, qui varie avec la direction du vecteur  $\mathbf{k}$  (i.e. la direction du vecteur unité  $\hat{\mathbf{u}}$ ).

Après multiplication par tous les dénominateurs (et après une disparition fortuite due à  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ ), l'**équation de Fresnel** (5.19) peut être réécrite comme une quadratique en  $n^2$  [ $An^4 - Bn^2 + C = 0$ ]. Les deux solutions sont

$$n^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.20)$$

où

$$\begin{aligned} A &\equiv u_x^2 n_x^2 + u_y^2 n_y^2 + u_z^2 n_z^2 \\ B &\equiv u_x^2 n_x^2 (n_y^2 + n_z^2) + u_y^2 n_y^2 (n_x^2 + n_z^2) + u_z^2 n_z^2 (n_x^2 + n_y^2) \\ C &\equiv n_x^2 n_y^2 n_z^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Les signes supérieur et inférieur (+ et -) dans (5.20) donnent **deux solutions positives** pour  $n^2$ . Les racines carrées positives de ces solutions produisent **deux valeurs physiques de  $n$** . Cela montre que, pour une direction de propagation donnée de  $\mathbf{k}$ , **chacune des deux valeurs pour  $n$  est associée à une direction de polarisation du champ électrique**. Une analyse plus large faite dans l'**annexe 5.C fournit l'orientation des champs électriques**, alors que nous ne montrons ici que comment on trouve les deux valeurs de  $n$ . Nous référons aux deux indices comme l'**indice lent et rapide**, puisque les ondes associées à chacun se propagent à la vitesse  $v = c/n$ .

Dans les cas spéciaux de propagation le long d'un des axes principaux du cristal, l'indice  $n$  prend deux des valeurs  $n_x$ ,  $n_y$  ou  $n_z$ , ce qui dépend desquelles sont orthogonales à la direction de propagation.

▪ **Exemple 5.1** (p. 126)

Calculer les deux valeurs possibles de l'indice de réfraction quand  $\mathbf{k}$  est dans la direction  $\hat{\mathbf{z}}$  (dans la structure principale du cristal).

- Solution : avec  $u_z = 1$  et  $u_x = u_y = 0$  [ $\hat{\mathbf{u}}$  vecteur unité qui définit la direction de propagation] nous avons (5.21)

$$A = n_z^2; \quad B = n_z^2 (n_x^2 + n_y^2); \quad C = n_x^2 n_y^2 n_z^2$$

Le terme en racine carré est alors

$$\begin{aligned} \sqrt{B^2 - 4AC} &= \sqrt{n_z^4 (n_x^4 + 2n_x^2 n_y^2 + n_y^4) - 4n_x^2 n_y^2 n_z^4} \\ &= \sqrt{n_z^4 (n_x^2 - n_y^2)^2} \\ &= n_z^2 (n_x^2 - n_y^2) \end{aligned}$$

en insérant cette expression dans (5.20), on trouve les deux valeurs de l'indice :

$$n = n_x, \quad n_y$$

**L'indice  $n_x$  est suivi par la lumière dont le champ électrique pointe dans la dimension  $x$ , et l'indice  $n_y$  est suivi par la lumière dont le champ électrique pointe dans la dimension  $y$  (on met en gras) (voir Annexe 5.C plus bas). Ils sont donc à polarisation perpendiculaire**

- fin Exemple 5.1 -

Avant de continuer, faisons un bref résumé de ce qu'on a vu jusque là. Pour des valeurs données de  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  et  $\chi_z$  associées avec la lumière dans un cristal à une fréquence donnée, vous pouvez définir les indices  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  en accord avec (5.18).  $\chi$  et  $n$  varient ensemble, voir la fig rajoutée sous (2.30).

$\chi$  est facteur de proportionnalité sans dimension entre  $\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{E}_0$  appelé susceptibilité diélectrique,  $\mathbf{P}$  étant la distribution spatiale du modèle de dipôles microscopiques constituant le matériau.

Ensuite est choisie une direction pour le vecteur  $\mathbf{k}$  (i.e.  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$ ). Cette direction a généralement **deux valeurs pour l'indice de réfraction** qui lui est **associé**, trouvées en se servant de l'équation de Fresnel (5.20). **Chaque indice est associé avec une direction de polarisation spécifique pour le champ électrique**... Chaque direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$  a son propre set de composantes de polarisation pour le champ électrique. **Les deux composantes de polarisation voyagent à des vitesses différentes (ce qui va avec  $n$  par définition), bien que la fréquence soit la même. Cela est connu comme biréfringence.**" (on met en gras)

### 5.3 Cristaux biaxiaux et uniaxiaux

"Tous les cristaux anisotropes ont certaines directions de propagation dans lesquelles les deux valeurs de  $n$  de l'équation de Fresnel sont égales. On parle de ces directions comme les axes optiques du cristal. Les axes optiques ne coïncident pas nécessairement avec les axes principaux  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$ . Lorsque la propagation se fait le long d'un axe optique, toutes les composantes de la polarisation présentent le même indice de réfraction. Si les valeurs de  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont toutes uniques, un cristal aura deux axes optiques et donc est nommé cristal biaxial.

Il est souvent pratique d'utiliser les coordonnées sphériques pour représenter les composantes de  $\hat{u}$  (voir fig. 5.3)

$$\begin{aligned} u_x &= \sin \theta \cos \varphi \\ u_y &= \sin \theta \sin \varphi \\ u_z &= \cos \theta \end{aligned} \quad (5.22)$$

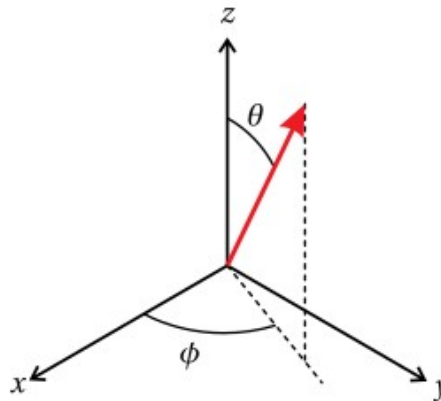


Figure 5.3 Spherical coordinates.

Ici  $\theta$  est l'angle polaire mesuré sur l'axe  $z$  du cristal et  $\varphi$  est l'angle azimutal mesuré de l'axe  $x$  du cristal. Ces équations soulignent le fait qu'**il y a seulement deux degrés de liberté lorsqu'on spécifie la direction de propagation** ( $\theta$  et  $\varphi$ ). Il est important de se rappeler que ces **angles** doivent être spécifiés dans le cadre des **axes principaux du cristal** qui souvent ne sont pas alignés avec les faces d'un cristal taillé dans un montage optique. (on met en gras)

Par convention, on oriente les axes principaux des cristaux biaxiaux de manière que  $n_x < n_y < n_z$ . Sous ces conventions, les deux axes optiques se situent dans le plan  $x$ - $z$  ( $\varphi = 0$ ) à deux valeurs de l'angle polaire  $\theta$ , mesuré de l'axe  $z$  :

$$\cos \theta = \pm \frac{n_x}{n_y} \sqrt{\frac{n_z^2 - n_y^2}{n_z^2 - n_x^2}} \quad (\text{directions d'axes optiques, cristal biaxial}) \quad (5.23)$$

L'indice de réfraction de la lumière qui voyage le long de l'un ou l'autre des axes optiques est  $n_y$ . Cela vient des deux faits suivants : les axes optiques sont dans le plan  $x$ - $z$  et la lumière voyageant dans ce plan peut être polarisée dans la direction  $\hat{y}$ ; et toutes les composantes de polarisation pour la lumière qui voyage le long des axes optiques ont le même indice de réfraction.

Pour des directions de propagation arbitraires, les deux indices de réfraction sont obtenus en utilisant l'équation de Fresnel (5.20). La valeur petite est généralement dite l'index "rapide" et la valeur la plus grande l'index "lent". (...)

(p. 128) "Dans le reste de ce chapitre, on se concentrera sur le cas plus simple des cristaux uniaxes. Dans les cristaux uniaxes deux des coefficients de susceptibilité  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  et  $\chi_z$  sont les mêmes. Dans ce cas il n'y a qu'un axe optique pour le cristal. Par convention dans les cristaux uniaxes on nomme la dimension qui a la susceptibilité unique comme l'axe  $z$  (i.e.  $\chi_x = \chi_y \neq \chi_z$ ). Cela fait de l'axe  $z$  l'axe optique. L'indice de réfraction unique est appelé l'indice extraordinaire

$$n_z = n_e \quad (5.24)$$

et l'autre indice est appelé l'indice ordinaire

$$n_x = n_y = n_o \quad (5.25)$$

Ces noms ont été donnés par Huygens, l'un des premiers scientifiques à avoir étudié la lumière dans les cristaux... Un cristal avec  $n_e > n_o$  est donné comme cristal positif, et un avec  $n_e < n_o$  est donné comme cristal négatif.

Pour **calculer l'indice de réfraction** pour une onde qui se propage dans un un cristal uniaxe, nous utilisons les définition (5.24) et (5.25) avec la représentation sphérique de  $\hat{\mathbf{u}}$  (5.22) dans l'**équation de Fresnel** (5.20) pour trouver les deux valeurs suivantes de  $n$ ...

$$n = n_o \quad (\text{cristal uniaxe}) \quad (5.26)$$

et

$$n = n_e(\theta) \equiv \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \quad (\text{cristal uniaxe}) \quad (5.27)$$

La **fonction indice** dépendante de l'angle  $n_e(\theta)$  dans (5.27) est aussi habituellement citée comme l'indice extraordinaire, le même nom utilisé pour la constante  $n_e$ . Bien qu'une telle nomenclature amène à la confusion, son usage est si banal qu'on le garde ici. Nous écrirons  $n_e(\theta)$  quand la fonction dépendante de l'angle donnée par (5.27) est requise, et écrirons  $n_e$  dans les formules où la constante (5.24) est nécessaire (comme du côté droit de (5.27)). Notez que  $n_e(\theta)$  ne dépend que l'angle polaire  $\theta$  (mesuré de l'axe optique  $\hat{\mathbf{z}}$ ) et pas de l'angle azimutal  $\varphi$ . (...)

Pour les ondes planes qui se propagent à  $\theta = 0$  avec  $\mathbf{k}$  dirigé exactement le long de l'axe optique, (5.27) donne  $n_e(\theta=0) = n_o$ . Cet indice est le même que l'indice donné par (5.26), et donc les deux composantes de la polarisation ont le même indice  $n_o$ . Pour une onde plane qui se propage avec  $\theta = \pi/2$  (i.e. dans le plan perpendiculaire à l'axe optique) la composante de polarisation le long de  $\hat{\mathbf{z}}$  a l'indice  $n_e(\theta=\pi/2) = n_e$  en accord avec (5.27), alors que la composante perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{z}}$  a l'indice  $n_o$  en accord avec (5.26). **Comme souligné en annexe 5.C, pour les directions de propagation arbitraires l'indice  $n_o$  correspond à la composante de polarisation du champ électrique qui pointe perpendiculairement au plan qui contient  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ , alors que l'indice  $n_e(\theta)$  correspond à la composante du champ de polarisation qui se trouve dans le plan qui contient  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  (on met en gras).** Dans ce cas, la composante de polarisation est dirigée partiellement le long de l'axe optique (i.e. elle a une composante  $z$ ). C'est pourquoi (5.27) donne un indice de réfraction qui est un mélange de  $n_o$  et  $n_e$ ."

dit autrement : "Dans le faisceau-e, le vecteur du champs électrique est situé dans le plan qui inclue l'axe-c du cristal, alors que dans le faisceau-o il est perpendiculaire à celui de faisceau-e..." (Nassau 1983, p. 228)

## 5.4 Réfraction à la surface d'un cristal uniaxe

(p. 129) "Ensuite nous considérons la réfraction lorsque de la lumière entre dans un cristal uniaxe. La loi de Snell (3.7 qui est :  $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ ) décrit la connexion entre les vecteurs  $\mathbf{k}$  incident par en haut et transmis à travers la surface. On doit considérer séparément la portion de lumière qui subit l'indice ordinaire et la portion qui subit l'indice extraordinaire. A cause des **différents indices**, la lumière polarisée ordinaire et extraordinaire a une réfraction dans le cristal à **deux angles** différents, et elles ont deux longueurs d'onde différentes dans le cristal.

Si l'on assume que l'indice à l'extérieur du cristal est un, la loi de Snell pour la polarisation ordinaire est :

$$\sin \theta_i = n_o \sin \theta_t \quad (\text{lumière ordinairement polarisée}) \quad (5.28)$$

où  $n_o$  est l'indice ordinaire à l'intérieur du cristal.

La lumière à polarisation extraordinaire obéit aussi à la loi de Snell, mais l'indice de réfraction du cristal dépend de la direction de propagation à l'intérieur du cristal relativement à l'axe optique. **La loi de Snell pour le rayon à polarisation extraordinaire est (on met en gras) :**

$$\sin \theta_i = n_e(\theta') \sin \theta_t \quad (\text{lumière à polarisation extraordinaire}) \quad (5.29)$$

où  $\theta'$  est l'angle entre l'axe optique à l'intérieur du cristal et la direction de propagation dans le cristal (donnée par  $\theta_t$  dans le plan d'incidence). Lorsque l'axe optique est à un angle arbitraire par rapport à la surface, la relation entre  $\theta'$  et  $\theta_t$  est complexe. On examinera la loi de Snell seulement pour le cas spécifique où l'axe optique est perpendiculaire à la surface du cristal, ce pour quoi  $\theta_t = \theta'$  ...

### ▪ Exemple 5.2

Examinez la loi de Snell pour un cristal uniaxe avec l'axe optique perpendiculaire à la surface  
 - Solution : Référez à la Fig. 5.6

Avec l'axe optique perpendiculaire à la surface, si la lumière frappe la surface du cristal pleine face, l'indice de réfraction est  $n_o$  quelle que soit l'orientation de la polarisation puisque  $\theta^i = \theta_t = 0$  (5/27; l'indice ne change pas autour de l'axe optique).

Dans le chapitre 3 qui n'a pas été repris ici ils définissent  $p$  et  $s$ , composantes du vecteur champ électrique porté par un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . La convention est que  $p$  est la composante du vecteur champ électrique parallèle au plan d'incidence (ici plan de la feuille de papier = écran) et  $s$  (pour senkrecht perpendiculaire en allemand) est la composante du vecteur champ électrique perpendiculaire à  $p$  (mais toujours perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ ) : p. 74, et Fig. 5.6.

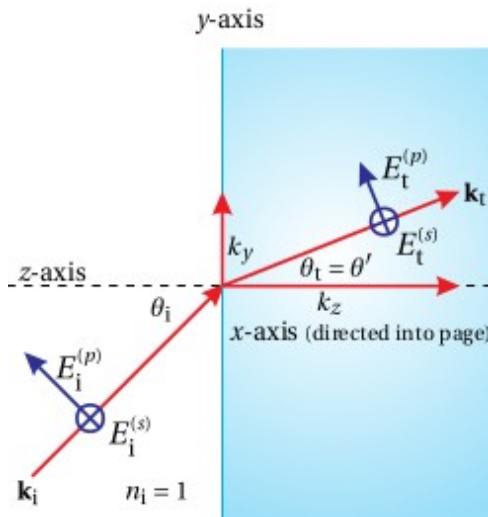


Fig. 5.6 Propagation de la lumière dans un cristal uniaxe avec son axe optique perpendiculaire à la surface

Lorsque la lumière arrive sur la surface avec un angle, la lumière de polarisation  $s$  continue à avoir l'indice  $n_o$  (par définition de  $s$  perpendiculaire au plan  $\mathbf{k} - z$ , l'indice, perpendiculaire à l'axe optique, ne change pas), alors que la lumière polarisée  $p$  se trouve avec l'indice extraordinaire  $n_e(\theta_i)$ .<sup>4</sup> (comme le montre la Fig. 5.6,  $E_t^{(p)}$  n'est plus perpendiculaire à l'axe optique donc  $n$  évolue avec l'angle).

<sup>4</sup> La correspondance entre  $s$  et  $p$  et les composantes ordinaire et extraordinaire de polarisation est spécifique à l'orientation de l'axe optique dans cet exemple. Pour des orientations arbitraires de l'axe optique par rapport à la surface, les composantes ordinaire et extraordinaire seront généralement des mélanges de lumière polarisée  $s$  et  $p$ .

Lorsqu'on insère (5.27) dans la loi de Snell (5.29) avec  $\theta^i = \theta_t$ , l'expression peut être inversée pour trouver l'angle de transmission  $\theta_t$  en fonction de  $\theta_i$ ...

$$\tan \theta_t = \frac{n_e \sin \theta_i}{n_o \sqrt{n_e^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{polarisée extraordinaire, axe optique } \perp \text{ surface}) \quad (5.30)$$

Aussi étrange que cette formule puisse paraître, c'est la loi de Snell, mais avec un indice dépendant de l'angularité."

- fin Exemple 5.2 -

### 5.5. Vecteur de Poynting dans un cristal uniaxe

(p. 130) "Lorsqu'un objet est observé à travers un cristal (comme une fenêtre), l'énergie associée avec la lumière polarisée ordinaire et extraordinaire **suit des chemins différents, donnant lieu à deux images** différentes. Ce phénomène est l'une des manifestations les plus couramment **observées** de la **biréfringence**. Puisque le vecteur Poynting dicte la direction d'écoulement de l'énergie, **c'est la direction de  $\mathbf{S}$  qui détermine la séparation de la double image** vue lorsqu'on regarde à travers un cristal biréfringent.(on met en gras)

encore p. 138 : "... puisque la direction de propagation de l'énergie est **ce que voit l'observateur**"

La loi de Snell dicte la connexion entre les directions des vecteurs  $\mathbf{k}$  incident ( $\mathbf{i}$ ) et transmis ( $\mathbf{t}$ ). Le vecteur Poynting  $\mathbf{S}$  pour une lumière polarisée purement ordinaire pointe dans la même direction que le vecteur  $\mathbf{k}$ , aussi la direction d'écoulement d'énergie pour la lumière polarisée ordinaire obéit aussi à la loi de Snell. Cependant pour la lumière polarisée extraordinaire, le vecteur Poynting  $\mathbf{S}$  n'est pas parallèle à  $\mathbf{k}$  (rappelez-vous la discussion en connexion avec (5.5) et (5.6)). Ainsi, l'écoulement d'énergie associé avec la lumière polarisée extraordinaire n'obéit pas à la loi de Snell. Quand Christiaan Huygens a vu ça dans les années 1600s, on peut l'imaginer s'exclamer "comme c'est extraordinaire !". La méthode de Huygens pour décrire le phénomène est donnée en Annexe 5.D (non vue ici, même résultat final que Exemple 5.3 ci-dessous).

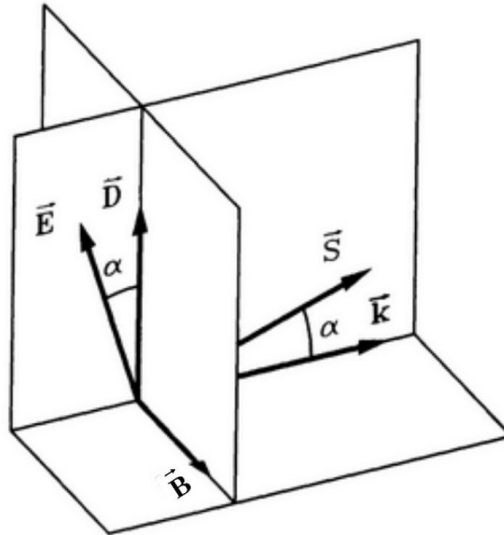


Fig. 5-6bis (Agulló-López et al. 1994, p. 27)

Le fait que  $\mathbf{D}$  ne soit pas parallèle à  $\mathbf{E}$  est la logique qui suit le modèle de Lorentz, à cause de l'inégalité des "ressorts" des fig. 5.1 et 5.2, la déformation électronique n'est plus dans l'axe du champ appliqué comme elle l'est dans les matériaux isotropes où tous les "ressorts" sont égaux.

Quant à  $\mathbf{S}$ , de part le théorème de Poynting (eq. 2.52,  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ ), produit vectoriel de  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , il leur est perpendiculaire et donc ne peut pas être perpendiculaire au plan  $\mathbf{D}, \mathbf{B}$  donc ne peut pas être dans la même direction que  $\mathbf{k}$ .

- Schwarzenbach (1996 p. 204) : "Il est important de faire la distinction entre la normale à l'onde  $\hat{\mathbf{u}}$  (vecteur unité de  $\mathbf{k}$ ) et le rayon lumineux  $\hat{\mathbf{s}}$  (vecteur unité de  $\mathbf{S}$ ). Le plan de l'onde est toujours perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{u}}$ . Il contient  $\mathbf{D}$  mais pas  $\mathbf{E}$ . L'onde plane est transverse par rapport à  $\hat{\mathbf{u}}$ , mais elle n'est pas purement transverse par rapport à  $\hat{\mathbf{s}}$ ."

- Agulló-López et al. (1994, p. 26) : Il y a deux trièdres tri-rectangulaires :  $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{S}$ .

"Aussi, puisque  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à tous les autres vecteurs, ceux-ci sont des vecteurs coplanaires. Le fait que  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{k}$  ne sont plus parallèles implique que le front d'onde ( $\mathbf{k}$ ) et l'énergie ( $\mathbf{S}$ ) progressent dans des directions différentes dans le cristal. Ces directions forment le même angle que celui formé par  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ . Aussi, seuls les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$ , mais pas  $\mathbf{E}$ , vibrent dans les surfaces de phase (perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ )."

- Agulló-López et al. (1994, p. 33) : "... la direction de propagation de l'énergie, aussi appelée *rayon* et représentée par  $\mathbf{S}$  en Fig. 5-6bis, est perpendiculaire la surface normale [celle de l'équation de Fresnel qu'on verra dans Yariv et Yeh] et les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont dans le plan tangent à cette surface, alors que le vecteur  $\mathbf{D}$  est dans le plan tangent à la surface de phase.

En pratique, la direction de propagation qui est de fait observée dans un cristal et celle d'énergie, i.e.  $\mathbf{S}$ . En utilisant le trièdre formé des vecteurs  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{s}}$ , on peut faire un développement parallèle à celui réalisé avec le trièdre  $\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$ , qui donne une *équation de rayon*, une *surface de rayon* et ainsi de suite. En fait il existe une loi de dualité entre les deux groupes d'équations qui souligne l'équivalence des deux procédures."

Pour analyser la lumière polarisée extraordinaire, nous aimerions développer une expression analogue à la loi de Snell, mais qui s'applique à  $\mathbf{S}$  plutôt qu'à  $\mathbf{k}$ . Cela alors décrit la direction que l'énergie associée avec les rayons extraordinaires prend en entrant dans le cristal. D'abord on trouve  $\mathbf{k}$  à l'intérieur du cristal à partir de la loi de Snell (5.29 qui est  $\sin \theta_i = n_e(\theta') \sin \theta_t$ ). En général le champ électrique  $\mathbf{E}$  peut être obtenu de (5.60, Annexe 5C) et alors le champ magnétique via  $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega$ , pour évaluer  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$  [i.e.  $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}, \mathbf{B}$ ]. En

général, ce processus est le mieux fait numériquement, puisque la loi de Snell (5.29) pour la lumière polarisée extraordinaire n'a généralement pas de solutions analytiques simples.

▪ **Exemple 5.3** (p. 130)

Trouvez une relation entre la direction du vecteur de Poynting (**S** donc  $\theta_s$ ) et l'angle d'incidence ( $\theta_i$ ) dans un cristal uniaxe et dans le cas spécial où l'axe optique est perpendiculaire à la surface.

- Solution : Pour trouver la direction du flux d'énergie, nous devons calculer  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ . Nous aurons besoin de connaître  $\mathbf{E}$  associé avec  $n_e(\theta')$ . Nous pouvons obtenir  $\mathbf{E}$  des procédures soulignées en annexe 5.C. De manière équivalente, nous pouvons l'obtenir de la relation constitutive (5.3 qui est

$\mathbf{P} = \hat{x} \epsilon_0 \chi_x E_x + \hat{y} \epsilon_0 \chi_y E_y + \hat{z} \epsilon_0 \chi_z E_z$  ) avec les définitions de (5.18 i.e.  $n_x \equiv \sqrt{1 + \chi_x}$  etc.) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D} =) \quad \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} &= \epsilon_0 [(1 + \chi_x) E_x \hat{x} + (1 + \chi_y) E_y \hat{y} + (1 + \chi_z) E_z \hat{z}] \\ &= \epsilon_0 (n_o^2 E_x \hat{x} + n_o^2 E_y \hat{y} + n_e^2 E_z \hat{z}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

car  $\mathbf{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$  , puis  $\chi_x E_x \hat{x} + E_x \hat{x} = E_x (\chi_x + 1)$  , etc., avec  $n_e$  lié à la composante du vecteur champ électrique dans la direction de l'axe optique (de type  $p$ , i.e. sur le plan feuille de papier/écran). On a là un vecteur dont les composantes  $E_x, E_y, E_z$  sont affectées de facteurs  $n_o$  et  $n_e$

Laissons le vecteur  $\mathbf{k}$  dans le plan  $y$ - $z$ . Nous pouvons l'écrire comme

$$\mathbf{k} = k (\hat{y} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t) \quad (\text{i.e. Fig. 5.6})$$

Alors la composante ordinaire du champ (électrique quand il est entré dans le cristal =  $E_t^{(s)}$  fig. 5.6) pointe dans la direction  $x$ , alors que la composante extraordinaire ( $E_t^{(p)}$ ) se trouve dans le plan  $y$ - $z$ .

L'équation (5.31) demande

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) &= k (\hat{y} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t) \cdot \epsilon_0 (n_o^2 E_x \hat{x} + n_o^2 E_y \hat{y} + n_e^2 E_z \hat{z}) \\ &= \epsilon_0 k (n_o^2 E_y \sin \theta_t + n_e^2 E_z \cos \theta_t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

car : propriété produit scalaire :  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$

et propriétés des produits scalaires des vecteurs unités :  $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$  et  $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$

Par conséquent, les composantes  $y$  et  $x$  du champ extraordinaire sont liées par

$$E_z = \frac{n_o^2 E_y}{n_e^2} \tan \theta_t \quad (5.33)$$

Nous pouvons écrire le champ électrique polarisé extraordinaire comme

$$\mathbf{E} = E_y \left( \hat{y} - \hat{z} \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta_t \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{polarisé extraordinaire}) \quad (5.34)$$

ça doit être  $\bar{\mathbf{E}} = E_y \hat{y} + (-E_z \hat{z})$

Le champ magnétique associé (voir (2.56) qui est  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  ) est

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega} = \frac{k (\hat{y} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t) \times E_y \left( \hat{y} - \hat{z} \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta_t \right)}{\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

i.e. reprise des formules au dessus, puis :

$$= -\hat{x} \frac{k E_y}{\omega} \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} \sin \theta_t \tan \theta_t + \cos \theta_t \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{polarisé extraordinaire}) \quad (5.35)$$

produit vectoriel est un vecteur,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ ;  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$  ici les  $\hat{y} \times \hat{y}$  et  $\hat{z} \times \hat{z}$  s'annulent, restent  $\hat{y} \times \hat{z}$  et  $\hat{z} \times \hat{y}$  qui donnent un vecteur  $\mathbf{x}$  avec les composantes ci-dessus

Le vecteur de Poynting moyenné sur le temps devient alors

$$\langle \mathbf{S} \rangle_t = \left\langle \text{Re} \{ \mathbf{E} \} \times \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right\} \right\rangle_t$$

$$= - \frac{k|E_y|^2}{\mu_0 \omega} \left( \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}} \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta_t \right) \times \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} \sin \theta_t \tan \theta_t + \cos \theta_t \right) \hat{\mathbf{x}} \langle \cos^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi E_y) \rangle_t$$

c'est  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  du dessus, utilisant la propriété produit vectoriel :  $(m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = m(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  + de l'imaginaire

$$= \frac{k|E_y|^2}{2\mu_0 \omega} \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} \sin \theta_t \tan \theta_t + \cos \theta_t \right) \left( \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta_t \right) \quad (\text{polarisé extraordinaire}) \quad (5.36)$$

$\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{x}$  donne  $\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{x}$  donne  $\hat{\mathbf{y}}$  sinon multiplications

Figurons la direction du vecteur de Poynting avec l'angle  $\theta_s$ . Par définition la tangente à cet angle est le rapport des deux vecteurs composantes de  $\mathbf{S}$  (sin/cos) :

$$\tan \theta_s = \frac{S_y}{S_z} = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta_t \quad (\text{polarisé extraordinaire}) \quad (5.37)$$

de (5.36), toute la première partie est facteur commun et s'annule, reste ça.

Alors que le vecteur  $\mathbf{k}$  est caractérisé par l'angle  $\theta_t$ , le vecteur de Poynting est caractérisé par l'angle  $\theta_s$ . En combinant (5.30) et (5.37), nous pouvons connecter  $\theta_s$  à l'angle incident  $\theta_i$  :

$$\tan \theta_s = \frac{n_o \sin \theta_i}{n_e \sqrt{n_e^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{polarisé extraordinaire}) \quad (5.38)$$

cela inverse les  $n_o$  et  $n_e$  au numérateur-dénominateur (par rapport à 5.30)

Comme nous l'avons remarqué dans le dernier exemple, nous avons le cas où la lumière polarisée *ordinaire* est de la lumière polarisée -s, et la lumière polarisée *extraordinaire* est de la lumière polarisée -p, ce qui est dû à notre choix spécifique d'orientation pour l'axe optique dans cette section. En général, les portions polarisées -s et -p de la lumière incidente peuvent chacune donner lieu aux deux, rayons extraordinaire et ordinaire.

- fin Exemple 5.3 -

## Annexe 5.C : Champ Électrique dans un cristal (p. 135)

Pour déterminer la direction du champ électrique associée **avec chaque valeur de  $n$** , on retourne à (5.10), (5.11), et (5.12) [relation de dispersion dans les cristaux pour x, y, z :  $\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_x) \right] E_x = k_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$  , etc.] dans l'analyse de la section 5.2. Ces équations peuvent être écrites en forme de matrices comme

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_x) - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_y) - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_z) - k_x^2 - k_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (5.55)$$

où nous avons utilisé  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ .

propriétés produit scalaire :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

aussi dans (5.10) :  $\left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_x) \right] E_x = k_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$  ,  $k_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$  peut s'écrire :

$$k_x (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = k_x^2 E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z$$

(toujours pour 5.10) si l'on passe toutes les composantes d'un coté on arrive à :

$$\left[ \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_x) - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k_x^2 \right] E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z = 0$$

et mêmes choses pour (5.11 et 5.12).

et le système des 3 équations (5.10) à (5.12) ainsi reformulées peut être écrit sous la forme correspondante d'équation de matrices (5.55).

[On retrouve cette équation de matrice (5.55) avec Yariv et Yeh plus bas : leur eq. (4.2-7)]

Nous pouvons diviser chaque élément par  $k^2$  et employer la définition (5.15 vecteur unité dans la direction de  $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} = k (u_x \hat{\mathbf{x}} + u_y \hat{\mathbf{y}} + u_z \hat{\mathbf{z}}) = k \hat{\mathbf{u}}$  donc  $k^2 = (ku_x)^2 + (ku_y)^2 + (ku_z)^2$ , voir aussi leur (5.16)), (5.17  $n = \frac{k c}{\omega}$  ) et (5.18  $n_z \equiv \sqrt{1 + \chi_z}$  , etc.) pour mieux rendre cette équation en matrice :

$$\begin{bmatrix} \frac{n_x^2}{n^2} - u_y^2 - u_z^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & \frac{n_y^2}{n^2} - u_x^2 - u_z^2 & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & \frac{n_z^2}{n^2} - u_x^2 - u_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (5.56)$$

Pour que (5.56) ait une solution non triviale (= sans intérêt,  $E = 0$  qui est une solution), c'est le déterminant de la matrice qui doit être zéro (voir aussi [ici](#) § IV-15.). Imposer cela est une voie équivalente à résoudre l'équation de Fresnel (5.19) pour  $n$ .

rappel : leur eq. Fresnel (5.19) :  $\frac{u_x^2}{(n^2 - n_x^2)} + \frac{u_y^2}{(n^2 - n_y^2)} + \frac{u_z^2}{(n^2 - n_z^2)} = \frac{1}{n^2}$

▪ Des manipulations de forme matricielle pourront être effectuées pour pointer à la signification physique directement lisible, McCall et al (2015 p. 27) :

".. équation pour  $\mathbf{E}$  qui peut être organisée comme une *équation propre*. Dans la forme la plus simple :

$$(- [\epsilon]^{-1} [u]^2) \mathbf{E} = n_s \mathbf{E} \quad (\text{de type } \mathbf{A} \mathbf{E} = \lambda \mathbf{E})$$

chaque champ électrique  $\mathbf{E}$  qui satisfait l'équation est un vecteur propre à droite et  $n_s = 1/\epsilon_s$  est une valeur propre;"

où  $[\epsilon]$  est le tenseur de  $\epsilon$ , dont cette expression prend la matrice inverse (appelée tenseur d'imperméabilité), et  $[u]$  le tenseur de  $\mathbf{u}$ .

En algèbre matriciel, si  $\mathbf{x}$  est un vecteur propre d'une matrice  $\mathbf{A}$  avec une valeur propre  $\lambda$ , alors  $\mathbf{x}$  est vecteur propre de la matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  avec la valeur propre  $1/\lambda$  (là § IV-16-2).

Agulló-López et al. (1994, p. 30-32) font la démonstration (avec  $\mathbf{D}$ ) en prenant un système de coordonnées avec un de ses axes principaux,  $Z'$ , sur  $\hat{\mathbf{u}}$  (de  $\mathbf{k}$ ... axe de propagation) ce qui réduit le problème à deux dimensions et arrivent à :

"De cette équation on obtient deux valeurs propres  $1/n_1^2$  et  $1/n_2^2$  correspondantes aux deux modes de propagation le long de  $Z'$ ."

Et on le verra plus loin ici, c'est ce que font Yariv et Yeh : leurs eq. (4.3-2) à (4.3-8) ci-dessous.

- On notera que suivant le jeu de variables utilisé par différents auteurs,  $\epsilon_0$ , peut être, où ne pas être, apparent :

Peatross et Ware utilisent  $n_x \equiv \sqrt{1 + \chi_x}$ , leur (5.18)

Yariv et Yeh utilisent  $\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (1 + \chi_{ij})$ , leur (4.1-5)

d'où la correspondance :  $\epsilon_i = \epsilon_0 n_i^2$

mais Agulló-López et al. (1994, p. 29, 34...) utilisent  $\epsilon_i = n_i^2$ ,

- Agulló-López et al. (1994, p. 28), pour leur équation équivalente à (5.56) ci-dessus :

"Remarquez que...[5.56] est analogue à une équation de valeurs propres ( $n^2$ ) et vecteurs propres ( $\mathbf{E}$ ) qui déterminent les *modes normaux* pour la propagation de la lumière à l'intérieur des cristaux anisotropes.

Après avoir développé le déterminant [qui est donc = 0] l'équation caractéristique donnant les valeurs propres s'écrit... [équation sous forme de polynôme]... qui est connue comme l'équation de Fresnel, et peut être vue comme l'équation fondamentale de l'optique cristalline. Remarquez que les termes de degré 6 de l'indice de réfraction disparaissent dans le développement du déterminant, qu'il ne reste qu'une équation du second degré en  $n^2$ . Par conséquent il n'y a que deux valeurs propres pour  $n^2$  et deux vecteurs propres pour  $\mathbf{E}$ . L'origine physique de ce résultat est la relation d'orthogonalité  $\mathbf{D} \perp \mathbf{n}$  [ $\mathbf{n}$  appelé ici  $\mathbf{u}$ ]. Cela fait osciller  $\mathbf{D}$  dans le plan de phase, ne permettant que deux vecteurs indépendants [puisqu'ils sont par ailleurs perpendiculaires entre eux car leur tenseur est symétrique réel]. L'équation...[de Fresnel] donc prédit l'occurrence de deux ondes lumineuses qui voyagent à des vitesses de phase différentes avec des polarisations différentes ( $v_{f1}$ ,  $v_{f2}$ ) avec des polarisations différentes ( $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ) (l'indétermination dans le signe des valeurs de  $n$  et  $v$  associée à une valeur propre donnée  $n^2$  est supprimée par la direction de  $\mathbf{u}$  imposée par l'onde incidente)."

(retour à Peatross et Ware)

Pour une direction donnée de  $\hat{\mathbf{u}}$  et une valeur de  $n$  (de l'équation de Fresnel), nous pouvons utiliser (5.56) pour **déterminer la direction du champ électrique,  $\mathbf{E}_i$ , associé avec cet indice ( $n_i$ ; on a mis en gras)**. On laisse comme exercice de montrer que dans les cas non dégénérés<sup>7</sup> (i.e.  $n \neq n_x, n_y, n_z$ ), **la direction appropriée du champs  $\mathbf{E}$  pour une valeur  $n$  est donnée par :**

<sup>7</sup> Dans un cristal biaxial, l'exigence  $n \neq n_x, n_y, n_z$  est garantie si  $u_x, u_y, u_z \neq 0$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \frac{u_x}{n^2 - n_x^2} \\ \frac{u_y}{n^2 - n_y^2} \\ \frac{u_z}{n^2 - n_z^2} \end{bmatrix} \quad (n \neq n_x, n_y, n_z) \quad (5.57)$$

De (5.56) à (5.57) : on multiplie la deuxième équation par  $u_z$  et la troisième par  $u_y$  et on soustrait ( $-u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 = -1$ ) :

$$\begin{aligned} E_x(u_x u_y u_z) + E_y u_z (n_y^2/n^2 - u_x^2 - u_z^2) + E_z (u_y u_z u_z) &= 0 \\ - E_x(u_x u_y u_y) + E_y (u_y u_y u_z) + E_z u_y (n_z^2/n^2 - u_x^2 - u_y^2) &= 0 \\ \hline E_y u_z (n_y^2/n^2 - 1) + E_z u_y (n_z^2/n^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

d'où faisant attention aux signes :  $E_y \frac{1}{E_z} = \frac{u_y}{(n^2 - n_y^2)} \times \frac{(n^2 - n_z^2)}{u_z}$

On fait de même en multipliant la première équation par  $u_y$  et la deuxième par  $u_x$  et on soustrait pour arriver à :  $\mathbf{E}_y \frac{1}{E_x} = \frac{(n^2 - n_x^2)}{u_x} \times \frac{u_y}{(n^2 - n_y^2)}$  de quelles solutions on voit la valeur de  $E_y$  et de là  $E_x$  et  $E_z$ .

"C'est une proportionnalité plutôt qu'une équation parce que les équations de Maxwell ne spécifient que la direction de  $\mathbf{E}$  - on est libre de choisir l'amplitude. **Parce** que l'équation de Fresnel donne deux valeurs pour  $n$ , (5.57) **spécifie deux composantes distinctes de polarisation associées avec chaque direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$**  (on met en gras). Ces composantes de polarisation forment une base naturelle pour décrire la propagation de la lumière dans un cristal. Lorsque la lumière est composée d'un mélange de ces deux polarisations, les deux composantes de polarisation subissent deux indices différents de réfraction.

- Agulló-López et al. (1994, p. 30) qui donnent une forme équivalente de cette proportionnalité, "Ces deux vecteurs déterminent les directions d'oscillation ou polarisation associées avec chaque mode de propagation. Puisque ce sont des vecteurs réels, on trouve une *polarisation* planaire ou *linéaire* pour les deux modes et, en général, elles ne sont pas orthogonales l'une à l'autre. Cependant, on montrera ... que les vecteurs de déplacement correspondants,  $D_1$  et  $D_2$ , sont orthogonaux mutuellement."

Si l'une des composantes de  $\hat{\mathbf{u}}$  (i.e.  $u_x$ ,  $u_y$  ou  $u_z$ ) est zéro précisément, l'entrée correspondante dans (5.57) donne une situation de zéro sur zéro. Cela se produit quand au moins une des dimensions dans (5.56) devient découplée des autres. Dans ces cas là, on peut re-résoudre (5.56) pour les directions de polarisations comme dans l'exemple qui suit.

▪ **Exemple 5.4** (p. 137)

Déterminez les directions des deux composantes de polarisation associées avec une lumière qui se propage dans la direction  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ . (Comparez avec l'exemple 5.1 vu plus haut = "Trouver indice avec équation de Fresnel quand  $\mathbf{k}$  dans direction de  $\hat{\mathbf{z}}$ ").

- Solution : Dans ce cas nous avons  $u_x = u_y = 0$ , aussi, comme on l'a vu ci-dessus, nous avons à retourner à (5.56) et résoudre de nouveau. Le jeu d'équations devient

$$\begin{bmatrix} \frac{n_x^2}{n^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_y^2}{n^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_z^2}{n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (5.58)$$

Remarquez que toutes les trois dimensions sont découplées dans ce système (i.e. il n'y a pas de termes hors-diagonale; i.e. de type  $u_{jk}$ ). Dans l'exemple 5.1 nous avons trouvé que les deux valeurs de  $n$  associées avec  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$  sont  $n_x$  et  $n_y$ . Si nous utilisons  $n = n_x$  dans notre jeu d'équations nous avons

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_y^2}{n_x^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_z^2}{n_x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

Si l'on assume que  $n_x$  et  $n_y$  sont uniques de sorte que  $n_y/n_x \neq 1$ , ces équations nécessitent  $E_y = E_z = 0$  mais permettent à  $E_x$  de ne pas être zéro. Cela prouve notre assertion antérieure (exemple 5.1) que **l'indice  $n_x$  est associé avec la lumière polarisée dans la dimension x** (on met en gras) dans le cas spécial de  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ . De manière similaire, quand  $n_y$  est inséré dans (5.58), nous trouvons qu'il est **associé avec la lumière polarisée dans la dimension y**.

Donc dans ce cas on a **deux** directions de (vibrations de)  $\mathbf{E}$  **perpendiculaires**, qui vont de paire avec les indices  $n_x$  et  $n_y$  : une selon l'axe des  $x$ , et une selon l'axe des  $y$ .

Ce qui va avec la théorie générale des valeurs propres qui édicte que les vecteurs propres qui appartiennent à des valeurs propres différentes d'une matrice réelle symétrique sont orthogonaux (là, § IV-16).

- fin exemple 5.4 -

Agulló-López et al. (1994, p. 40). : sur les cristaux uniaxiaux : "...  $\mathbf{E}_\theta$  doit être parallèle à  $\mathbf{D}_\theta$  et donc perpendiculaire à  $\mathbf{E}_e$ . Par conséquent, dans les cristaux uniaxiaux les vecteurs de champ électrique des deux modes de propagation sont perpendiculaire l'un à l'autre (cela n'est pas vrai pour les cristaux biaxiaux), bien que  $\mathbf{E}_e$  n'est pas perpendiculaire au vecteur d'onde, i.e. :  $\mathbf{E}_\theta \cdot \mathbf{E}_e = 0$ ,  $\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{u} \neq 0$ ."

On peut utiliser (5.57) pour étudier le comportement de la direction de polarisation quand la direction de propagation varie. La figure 5.7 montre des courbes de la direction de polarisation (i.e.  $E_x$ ,  $E_y$ , et  $E_z$  normalisées) dans le niobate de potassium (un piézoélectrique transparent, orthorhombique) lorsque l'on varie la direction de propagation.

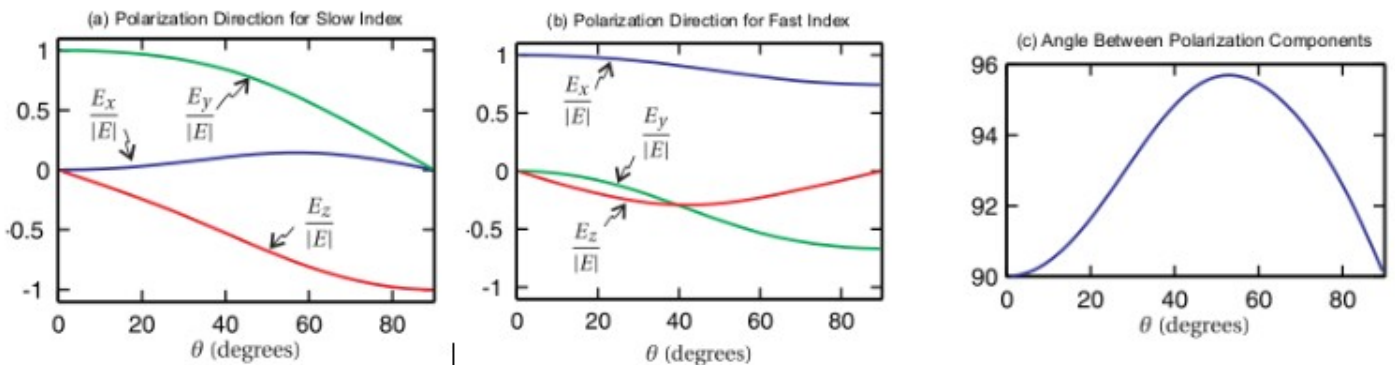


Fig. 5.7 Direction de polarisation associée avec les deux valeurs de  $n$  dans le niobate de potassium ( $\text{KNbO}_3$ ) à  $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$  ( $n_x = 2.22$ ,  $n_y = 2.34$ , et  $n_z = 2.41$ ) et  $\phi = \pi/4$ . La courbe c, dernière à droite, montre l'angle entre les deux composantes de polarisation.

Le graphique est créé en insérant la représentation sphérique de  $\hat{\mathbf{u}}$  (5.22) dans l'équation de Fresnel (5.20) pour un signe choisi du  $\pm$ , et alors insérant le  $n$  résultant dans (5.57) pour **trouver le champ électrique associé**. Comme on l'a vu dans l'Exemple 5.4, à  $\theta = 0$ , la lumière associée avec l'indice lent (diagramme de gauche) est **polarisée le long de l'axe y** et la lumière associée avec l'indice rapide (diagramme du centre) est **polarisée le long de l'axe x**. (on met en gras)

Dans la Fig 5.7c (diagramme de droite), nous avons tracé l'angle entre les deux composantes de polarisation. À  $\theta = 0$  **les deux composantes de polarisation sont  $90^\circ$**  à part, comme vous pouviez vous y attendre. Cependant, remarquez que dans les autres directions de propagation les deux composantes linéaires de polarisation ne sont pas précisément perpendiculaires. Et pourtant, les deux composantes de polarisations de  $\mathbf{E}$  sont orthogonale dans un sens mathématique<sup>8</sup>, de manière qu'elles constituent encore une base utile pour décomposer le champ de lumière.

<sup>8</sup> Les deux composantes du vecteur de déplacement électrique  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  restent perpendiculaire.

#### • Déterminer les champs dans un Cristal Uniaxe

Pour trouver les directions du champ électrique pour la lumière qui va avec l'indice de réfraction ordinaire dans un cristal uniaxe, nous insérons  $n = n_0$  dans les conditions (5.56), et résolvons pour les champs autorisés... pour trouver

$$\mathbf{E}_\theta(\hat{\mathbf{u}}) \propto \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Cette composante de champ est associée avec l'onde ordinaire. Juste comme dans un matériau isotrope tel que le verre, l'indice de réfraction pour la lumière avec cette polarisation ne varie pas avec  $\theta$ .

La composante de polarisation associée avec  $n_e(\theta)$  est trouvée en utilisant (5.57) :

$$\mathbf{E}_e(\hat{\mathbf{u}}) \propto \begin{bmatrix} \frac{\sin \theta \cos \phi}{n_e^2(\theta) - n_o^2} \\ \frac{\sin \theta \sin \phi}{n_e^2(\theta) - n_o^2} \\ \frac{\cos \theta}{n_e^2(\theta) - n_e^2} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Remarquez que cette composante de polarisation est dirigée partiellement le long de l'axe optique (i.e. elle a une composante z), et elle n'est pas perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  puisque  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}_e(\hat{\mathbf{u}}) \neq 0 \dots$  **Elle est cependant perpendiculaire à la composante de polarisation ordinaire** puisque  $\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_o = 0$ . (on met en gras)

Champ électrique  $\mathbf{E}$  des rayons ordinaire et extraordinaires sont perpendiculaires;

Remarquez que quand  $\theta = 0$  (5.27) se réduit à  $n = n_o$  et donc les deux indices sont les mêmes. D'un autre coté, si  $\theta = \pi/2$  alors (5.27) se réduit à  $n = n_e$ .

## Annexe 2.C : Densité d'Énergie des champs Électriques

(p. 65) "Dans cette annexe, nous montrons que le terme  $\epsilon_0 E^2/2$  dans (2.53 qui est  $u_{\text{champ}} \equiv \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

énergie par volume stockée dans les champs électrique et magnétique) correspond à la densité d'énergie d'un champ électrique. Le potentiel électrique  $\phi(\mathbf{r})$  (en unités d'énergie par charge, ou volts) décrit l'énergie potentielle qu'une charge aurait si elle était placée à n'importe quel point dans le champ. Le champ électrique et le potentiel sont liés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (2.74)$$

$\nabla \phi$  est un gradient, eq. (0.4); c'est un vecteur; une interprétation du gradient est que si  $\phi(x, y, z) = c$  est l'équation d'une surface, alors  $\nabla \phi$  est une normale à cette surface.

L'énergie  $U$  nécessaire pour assembler une distribution de charges (en raison de l'attraction ou répulsion) peut être écrite en termes de la somme sur toutes les charges (ou densité de charge  $\rho(\mathbf{r})$ ) situées dans le potentiel :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dv \quad (2.75)$$

Nous considérons que le potentiel provient des charges elles-mêmes. Le facteur 1/2 est nécessaire pour éviter un double comptage. Pour apprécier ce facteur, considérez juste des charges ponctuelles : il est nécessaire de compter l'énergie due à une charge en la présence du potentiel de l'autre pour obtenir l'énergie requise pour amener les charges ensemble.

Une substitution de (1.1 qui est  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , loi de Gauss) pour  $\rho(\mathbf{r})$  dans (2.75) donne

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \phi(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv \quad (2.76)$$

Ensuite, nous utilisons l'identité de vecteur de P0.9

P0.9, p. 20,  $\nabla \cdot (\mathbf{g} \mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g} + \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f}$  soit  $\mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (\mathbf{g} \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g}$

et obtenons

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot [\phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] dv - \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) dv \quad (2.77)$$

Une application du théorème de divergence (0.11 vu au départ de ce doc)

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv \quad \text{ou} \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv$$

sur la première intégrale et une substitution de (2.74) dans la deuxième intégrale donne

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S \phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv \quad (2.78)$$

Nous pouvons considérer le volume  $V$  (entouré par  $S$ ) aussi grand que l'on veut, disons une sphère de rayon  $R$ , de telle manière que toutes les charges soient incluses largement à l'intérieur. Alors l'intégrale de surface sur  $S$  disparaît quand  $R \rightarrow \infty$  puisque  $\phi \sim 1/R$  et  $E \sim 1/R^2$ , alors que  $ds \sim R^2$ . Alors l'énergie totale est exprimée seulement en terme du champ électrique :

$$U = \int_{AllSpace} u_E(\mathbf{r}) dv \quad (2.79)$$

où

$$u_E(\mathbf{r}) \equiv \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (2.80)$$

est interprétée comme la densité d'énergie du champ électrique.

## Annexe 2.D : Densité d'Énergie des champs Magnétiques

(p. 67) Dans une dérivation similaire à celle de l'annexe 2.C, nous considérons l'énergie associée avec les champs magnétiques. Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  (en unités d'énergie par charge  $\times$  vitesse) décrit l'énergie potentielle qu'une charge qui se déplace avec la vitesse  $\mathbf{v}$  aurait si elle est mise dans le champ. Le champs magnétique et le potentiel vecteur sont connectés par

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.81)$$

$\nabla \times \mathbf{A}$  est un rotationnel, trajet le long d'une courbe

L'énergie  $U$  nécessaire pour assembler une distribution de courants peut être écrite en terme de l'addition sur tous les courants (ou la densité de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ ) situé dans le champ de potentiel vecteur:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv \quad (2.82)$$

Comme dans (2.75), le facteur 1/2 est nécessaire pour éviter un double comptage de l'influence des courants l'un sur l'autre.

En assumant que les courants sont réguliers (pas de variation avec le temps), on peut substituer la loi d'Ampère (1.21 sans la correction de Maxwell, qui est,  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ) dans (2.82), ce qui donne

$$U = \frac{1}{2 \mu_0} \int_V [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv] \quad (2.83)$$

Ensuite nous employons l'identité de vecteur P0.8

P0.8 (p. 20) :  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$  ou  $\mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) + \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g})$  avec.  $\mathbf{g} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$  de laquelle l'expression précédente devient

$$U = \frac{1}{2 \mu_0} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] dv - \frac{1}{2 \mu_0} \int_V \nabla \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] dv \quad (2.84)$$

En substituant (2.81) dans la première équation et en appliquant le théorème de divergence (0.11) sur la deuxième intégrale, cette expression pour l'énergie totale devient

$$U = \frac{1}{2 \mu_0} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv - \frac{1}{2 \mu_0} \oint_S [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (2.85)$$

Comme il a été fait en connexion avec (2.78), si nous choisissons un volume assez grand (une sphère de rayon  $R \rightarrow \infty$ ), l'intégrale de surface disparaît puisque  $A \sim 1/R$  et  $B \sim 1/R^2$ , alors que  $ds \sim R^2$ . L'énergie totale (2.85) alors se réduit à

$$U = \int_{AllSpace} u_B(\mathbf{r}) dv \quad (2.86)$$

où

$$u_B(\mathbf{r}) \equiv \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad (2.87)$$

est la densité d'énergie pour un champ magnétique.

- o - o - o - Fin d'extraits de "Physique de la lumière et optique" par J. Peatross et M. Ware - o - o - o -

## Intermède

### Champ électrique externe $\mathbf{E}$ , déplacement électrique $\mathbf{D}$ , polarisation électrique $\mathbf{P}$ .

En 1837 M. Faraday a trouvé que la charge totale sur une sphère métallique externe s'égalisait, en signe opposé (a été brièvement mise à la terre), à celle d'une sphère métallique interne dont elle est séparée par un isolant (= diélectrique, plusieurs ont été essayés). Il en concluait qu'il y avait quelque sorte de *déplacement*. Faraday a montré qu'il y a proportionnalité entre ce "flux électrique" (en coulomb) qui "s'est déplacé" entre les deux sphères et la charge totale de la sphère interne.

Il a proposé des lignes imaginaire de flux radial autour de la sphère interne, avec : nombre de lignes de flux = nombre de charges internes. Cette expérimentation expose ce qu'on appelle la loi de Gauss.

La densité, le "nombre" de ces lignes de champ qui "s'écoulent" perpendiculairement à une surface unité à une certaine distance d'un point charge dans le vide est appelé *densité de flux électrique* et a été nommé  $\mathbf{D}$ .  $\mathbf{D}$  est un champ vectoriel (ce qui comporte une direction). Sa magnitude est donnée par le nombre de "lignes" de flux qui traversent une surface normale au flux. Elle est mesurée en coulomb par mètre carré ( $C/m^2$ ).

$\mathbf{D}$  peut être appelé : *densité de flux électrique*, ou *induction électrique* ou *déplacement électrique*.  $\mathbf{D}$  est un concept en électromagnétisme qui décrit comment les champs électriques interagissent avec les matériaux. "En termes simples le déplacement électrique (densité de flux)  $\mathbf{D}$  représente la quantité de champ électrique qui passe à travers une surface unité de matériau."

Dans le vide (espace libre), la relation constitutive entre le déplacement électrique et le champ électrique est :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E},$$

$\epsilon_0$  est la *permittivité électrique* dans le vide (espace libre) avec la valeur de  $8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m. Comme  $\epsilon_0$  est très petit ( $<1$ ), dans l'espace libre la magnitude du champ  $\mathbf{D}$  sera toujours plus petite que celle du champs  $\mathbf{E}$ .  $\epsilon$  est donc généralement la *permittivité électrique*, un coefficient pour passer de  $\mathbf{E}$  à  $\mathbf{D}$ .

Le champ est une force par unité de charge, d'unité : N/C ou J/(C·m) ou V/m. Le Farad = C/V donc V/m multiplié par (C/V)(1/m) =  $C/m^2$  pour le déplacement.

▪ En milieu autre que le vide, le matériau présent lui même réagit au champ  $\mathbf{E}$ , la relation générale, dont l'expérience de Faraday, entre le déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , le champ électrique externe  $\mathbf{E}$ , et la *permittivité électrique*  $\epsilon$  est :

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E}$$

où  $[\epsilon]$  est le tenseur de  $\epsilon$  (cf. [là](#) § II.).

(on distingue  $\epsilon$ , permittivité relative (constante diélectrique), et  $\epsilon_0 \epsilon$ , permittivité)

On peut aussi raisonner que ce matériau a une *susceptibilité électrique*,  $\chi$ , qui indique le degré de polarisation (au 1<sup>er</sup> sens, modèle de Lorentz, pas celui pétrographique) de ses dipôles, i.e. séparer une propriété intrinsèque et exclusive au matériau. Sous l'effet du champ électrique externe  $\mathbf{E}$  les dipôles atomiques ou moléculaires du matériau diélectrique s'alignent. Le vecteur de cette *polarisation électrique* ou *densité volumétrique de polarisation* est nommé  $\mathbf{P}$  qui a été défini :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 [\chi] \mathbf{E}$$

$\chi$  est la *susceptibilité électrique* qui a été définie sans dimension. La quantité vectorielle  $\mathbf{P}$  est donc, comme  $\mathbf{D}$ , en unités de coulomb par mètre carré,  $C/m^2$ .

Donc avec un matériau diélectrique et traitement séparé de la polarisation, il faut ajouter  $\mathbf{P}$  à l'équation  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  du vide, la définition générale de  $\mathbf{D}$  est :

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

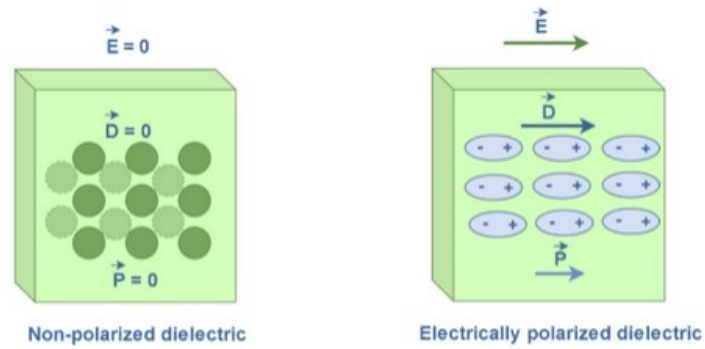
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 [\chi] \mathbf{E} = \epsilon_0 [(1 + \chi)] \mathbf{E}$$

c'est-à-dire alors :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (1 + \chi_{ij}).$$

La *susceptibilité électrique*,  $\chi$ , apparaît de cette manière comme un terme correctif. Ce qui est surtout important est le traitement de l'anisotropie par un tenseur de  $\chi$  suivant les directions de l'espace, et qui donc peut être pareillement traité par un tenseur de  $\epsilon$ .

$\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  marchent dans le même sens,  $\mathbf{D}$  inclut  $\mathbf{P}$ .



"Ces relations entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ ... sont connues comme relations constitutives. Elles sont caractéristiques du matériau et le plus souvent de nature empirique." (Agulló-López et al. 1994, p. 21).

Sur le plan pratique,  $\mathbf{D}$  englobe donc la polarisation intrinsèque au matériau.

Des charges libres dans le matériau peuvent aussi être prises en compte si elles existent afin de respecter la loi de Gauss mais on ne traite pas de cela ici (zéro charge libre).

## II. Ondes optiques dans les cristaux

A. Yariv et P. Yeh (1984)  
CalTech et Rockwell Int.Sc. Center  
cours d'electro-optique

- extraits -

(avec des développements personnels écrits en couleur afin de "suivre" les auteurs)

La numérotation des équations est celle de ces auteurs (n'a plus à voir avec ci-dessus)

- Yariv et Yeh (1984) appellent «  $\hat{s}$  » le vecteur unité dans la direction de propagation, ce qu'on a changé pour  $\hat{u}$  pour être comme ci-dessus

- Ils utilisent :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (1.1-5)$$

$\mathbf{H}$  est employé lorsque sont traités les matériaux magnétisés où  $\mathbf{M}$ , *magnétisation*, est le moment de dipôles magnétiques par unité de volume. Mais, "... on considère que les milieux transparents ne sont pas magnétiques et sont donc caractérisés par la même constante  $\mu_0$  que le vide" (Chartier 2003, p. 41). Donc ici  $\mathbf{H}$  est simplement  $\mathbf{B}$  divisé par la constante  $\mu_0$  (perméabilité magnétique dans le vide).

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.1-6)$$

ce que lon vient de le voir dans l'intermède.

▪ On a vu plus avant, suite à l'eq (1.36), les explications de Peatross & Ware sur leur choix à eux de ne pas utiliser  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$  (i.e. de rester avec  $\mathbf{B}$  et  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ).

### 4. Propagation électromagnétique dans les matériaux anisotropes (p. 69)

#### 4.1. Le tenseur diélectrique d'un matériau anisotrope

"Dans un matériau isotrope la polarisation induite est toujours parallèle au champ électrique et lui est liée par un facteur scalaire (la susceptibilité *diélectrique*) qui est indépendant de la direction le long de laquelle le champ est appliqué. Cela n'est plus vrai dans les matériaux anisotropes, à l'exception des quelques directions particulières. Puisque le cristal est fait d'un réseau périodique régulier d'atomes (ou molécules) avec une certaine symétrie, on peut s'attendre à ce que la **polarisation induite** dépendra, et en magnitude et en direction, de la direction du champ appliqué. Au lieu d'une simple relation scalaire liant  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$ , nous avons

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) \end{aligned} \quad (4.1-1)$$

≈ éq. (5-1) de Peatross & Ware

où les lettres capitales sont pour les amplitudes complexes des quantités harmoniques temporelles correspondantes. Le réseau  $3 \times 3$  des coefficients  $\chi_{ij}$  est appelé le *tenseur de susceptibilité diélectrique*. Les magnitudes de  $\chi_{ij}$  dépendent, bien sûr, du choix des axes  $x, y, z$  par rapport à la structure cristalline. Il est toujours possible de choisir  $x, y$  et  $z$  de telle manière que les éléments hors de la diagonale disparaissent, laissant (sachant que c'est un modèle, cf. § 2.4)

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 \chi_{11} E_x \\ P_y &= \epsilon_0 \chi_{22} E_y \\ P_z &= \epsilon_0 \chi_{33} E_z \end{aligned} \quad (4.1-2)$$

Ces directions sont appelées les axes diélectriques principaux du cristal.

On peut, au lieu d'utiliser l'éq. (4.1-1, *susceptibilité*), décrire la réponse diélectrique du cristal par le moyen du tenseur de permittivité diélectrique  $\epsilon_{ij}$  défini par

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z \\ D_y &= \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z \\ D_z &= \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z \end{aligned} \quad (4.1-3)$$

De l'éq. (4.1-1) et de la relation

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.1-4)$$

nous avons

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (1 + \chi_{ij}) \quad (4.1-5)$$

▪ Peatross & Ware n'ont pas utilisé  $\epsilon$ , ils ont préféré laisser  $\epsilon_0(1 + \chi)$ , mais on voit de leur (5.18) que  $\epsilon = \epsilon_0 n^2$ . Ces neuf quantités,  $\epsilon_{11}, \epsilon_{12} \dots$  sont des constantes du matériau et constituent le *tenseur diélectrique*, l'éq. (4.1-3) est souvent écrite en notation de tenseur comme

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (4.1-6)$$

où l'on observe la convention d'addition sur les indices répétés.

Dans la plus grande partie de ce chapitre nous assumons que le matériau est homogène, non absorbant et isotrope sur le plan magnétique.

La densité d'énergie du champ électrique stockée dans le matériau anisotrope est

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} E_i \epsilon_{ij} E_j \quad (4.1-7)$$

La densité d'énergie des champs électromagnétiques  $U$  avait été définie au début de leur texte. C'est un scalaire

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.2-5)$$

qui a les dimensions de joules/m<sup>3</sup>. Cette quantité est ajoutée à la magnitude d'écoulement d'énergie (du vecteur  $\mathbf{S}$  de Poynting) pour établir l'équation de continuité de conservation d'énergie (théorème de Poynting, éq. (2.50) et (2.51) de Peatross et Ware 2015).

Cela correspond à l'expression  $u_{\text{champ}}$  de Peatross et Ware 2015 :

$$u_{\text{champ}} \equiv \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (2.53) \text{ de Peatross et Ware}$$

indiquée comme "énergie par volume stockée dans les champs électrique et magnétique"

En différenciant l'éq. (4.1-7) par rapport au temps, nous obtenons

$$\dot{U}_e = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\dot{E}_i E_j + E_i \dot{E}_j) \quad (4.1-8)$$

$(uv)' = u'v + uv'$  (points au dessus des lettres = dérivées)

D'après la dérivation du théorème de Poynting dans la section 1.2 [non repris ici, traité plus avant dans Peatross et Ware avec leurs éq. (2.49) et (2.50)], l'écoulement net de puissance dans une unité de volume dans un matériau sans perte est

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (4.1-9)$$

ce qui, en utilisant l'éq. (4.1-6) pour  $\mathbf{D}$  peut être écrit comme

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = E_i \epsilon_{ij} \dot{E}_j + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad (4.1-10)$$

Puisque le vecteur de Poynting correspond au flux d'énergie dans le matériau, le premier terme du coté droit de l'éq. (4.1-10) doit être égal à  $\dot{U}_e$ . Donc nous avons l'équation suivante

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\dot{E}_i E_j + E_i \dot{E}_j) = \epsilon_{ij} E_i \dot{E}_j \quad (4.1-11)$$

Il s'en suit immédiatement de éq. (4.1-11) que (implique que  $\dot{E}_i E_j = E_i \dot{E}_j$  ?) :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (4.1-12)$$

Cela veut dire que le tenseur diélectrique est symétrique et possède, en général, seulement six éléments indépendants (3 diagonaux, les 3 au dessus étant ensuite les mêmes que les 3 en dessous). Cette symétrie est une conséquence directe de la définition (4.1-6) et l'assomption que  $\epsilon$  est un tenseur diélectrique réel. (...)

## 4.2. Propagation d'onde plane en matériau anisotrope (p. 71-5)

Dans un matériau anisotrope tel qu'un cristal, la vitesse de phase de la lumière dépend de son état de polarisation en même temps que de sa direction de propagation. A cause de l'anisotropie, **l'état de polarisation d'une onde plane peut varier quand elle se propage à travers le cristal**. Cependant, pour une direction de propagation dans le matériau, **il existe, en général, deux ondes propres** (eigenwaves) **avec des vitesses de phase propres** (eigen-phase-velocities) **bien définies et des directions de polarisation** (on met en gras). Une onde lumineuse avec une polarisation parallèle à l'une de ces directions restera dans le même état de polarisation dans sa progression dans le matériau anisotrope. Ces polarisations propres, de même que les vitesses propres de phase correspondantes (ou, de manière équivalente, les indices propres de

diffraction), peuvent être déterminées des Eqs (1.1-1 qui est  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ , loi de Faraday) et (1.1-2 qui est  $\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$ , loi d'Ampère révisée) et du tenseur diélectrique.

Pour dériver ces résultats, on assume une onde plane monochromatique de fréquence angulaire  $\omega$  qui se propage dans le matériau anisotrope avec un champ électrique

$$\mathbf{E} \exp [i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (4.2-1)^*$$

et un champ magnétique

$$\mathbf{H} \exp [i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (4.2-2)$$

\* Comme vu plus avant, notation complexe classique d'onde plane harmonique connue comme satisfaisant l'équation d'onde; dont la forme non complexe/partie réelle est  $\mathbf{E} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde,

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \hat{\mathbf{u}} \quad (4.2-2\text{-bis})$$

[Rappel, pour toute onde,  $k =$  constante de propagation, nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ ; c.f. annexe O.P.] avec  $\hat{\mathbf{u}}$  un vecteur unité dans la direction de propagation.  $n$  est l'indice de réfraction qui doit être déterminé. Substituant pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  des équations (4.2-1) et (4.2-2) respectivement, dans les équations de Maxwell (1.1-1 qui est  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ ) et 1-1-2 qui est  $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$ ) donne

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (4.2-3)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (4.2-4)$$

On a vu en commentaire de (5.5) dans Peatross et M. Ware que  $\partial/\partial t = -i\omega$  et que pour  $\bar{\mathbf{E}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , l'opérateur  $\nabla = i\mathbf{k}$  donc :  $i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\mu_0 (-i\omega) \mathbf{H}$  et (si  $\mathbf{J} = 0$ )  $i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} = -i\omega \epsilon \mathbf{E}$  qui se simplifient (et  $\mu = \mu_0$  dans le cas des diélectriques non magnétiques).

En éliminant  $\mathbf{H}$  des équations (4.2-3) et (4.2-4) on obtient

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (4.2-5)$$

Dans le système de coordonnées principal, le tenseur diélectrique  $\epsilon$  est donné par

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (4.2-6)$$

On a vu pourquoi avec Peatross-Ware en raisonnant sur la susceptibilité  $\chi$  en § 5.2.

L'équation (4.2-5) peut être écrite comme

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2-7)$$

on retrouve éq. (5.55) de Peatross-Ware vue plus haut, puisque  $\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (1 + \chi_{ij})$  et  $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

▪ On sait que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$  (lâ, § I-6.), mais le produit vectoriel étant anti-commutatif

$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})] : \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$

d'où ici :  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -k^2 \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}$

et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ , soit  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z$

avec, comme a vu avec Peatross-Ware en (5.55) :  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

donc pour  $x$  :  $-E_x (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + (E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z) k_x$  auquel il faut ajouter le 2<sup>e</sup> membre de (4-2-5) réglé par le tenseur diélectrique  $\epsilon$ . Avec la disposition des équations en matrice dans le système de coordonnées principales,  $x, y, z$ , la variable  $E$  est séparée en vecteur-colonne à droite de la matrice de ses éléments.

Pour qu'existent des solutions non triviales [i.e.  $E_x = E_y = E_z = 0$  qui est une solution], le déterminant de la matrice dans l'équation (4.2-7) doit s'éliminer.

On va voir plus bas, éq. (4.3-2) à (4.3.8) de ces auteurs, que par des manipulations matricielles et ramenant le problème à deux dimension par changement d'axes, ils montrent que  $n^2$  ou  $1/n^2$  sont des valeurs propres associées à deux vecteurs propres  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{D}$ .

Cela amène à une relation entre  $\omega$  et  $\mathbf{k}$ ,

$$\det \begin{vmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2-8)$$

L'équation ci dessus [qui est celle de Fresnel\*] peut être représentée par une surface tri-dimensionnelle dans l'espace  $\mathbf{k}$  (espace des moments).

\* Le déterminant (4.2-8) peut-être développé pour donner l'équation de Fresnel sous forme de polynôme.

▪ Agulló-López et al. (1994, p. 30). "L'équation de Fresnel peut être représentée par une surface tridimensionnelle dans l'espace  $\mathbf{n}$  (*momentum space* puisque  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0$ ). Cette surface est connue comme *surface normale* et dépend du matériau particulier... Pour certaines directions de propagation ( $u_x, u_y, u_z$ ), les points auxquels les lignes droites correspondantes intersectent les deux nappes donnent les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  associés avec cette direction..."

Nota : il semble qu'en littérature les termes "k-space" et "momentum-space" sont utilisés de manière interchangeables. Le photon a une énergie  $\mathcal{E} = h\nu$  et on lui donne un momentum  $p = \mathcal{E}/c = h/\lambda$  avec un moment vectoriel :  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  (avec  $\hbar = h/2\pi$ ; Hetch 2002 p. 57) donc les deux sont équivalents à une constante près.

Cette surface est connue comme la *surface normale* [en France, Chartier la nomme *Surface des indices*] et consiste en deux nappes qui, en général, ont 4 points en commun (voir fig. 4.1). Les deux lignes qui passent par l'origine et ces deux points sont connues comme axes optiques. La fig. 4.1 montre un de ces axes optiques.

Sur une direction de propagation donnée, il y a en général deux valeurs de  $k$  qui sont les intersections de la direction de propagation et la surface normale. Ces deux valeurs  $k$  correspondent à deux vitesses de phase ( $\omega/k$ ) des ondes qui se propagent le long de la direction choisie [ $\omega/k = c/n$  puisque  $k = (\omega/c)n$  et c'est finalement  $v$  puisque  $n = c/v$ ].

Les directions du vecteur champ électrique associé avec ces propagations peuvent aussi être obtenues de Eq (4.2-7) et sont données par :

$$\begin{bmatrix} \frac{k_x}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_x} \\ \frac{k_y}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_y} \\ \frac{k_z}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_z} \end{bmatrix} \quad (4.2-9)$$

On a vu lors de passage des Eq. (5.56) à (5.57) de Peatross-Ware, la méthode pour passer de Eq ici de (4.2.8) à (4.2.9).

Il sera montré dans la section 4.3 que les deux vitesses de phase correspondent toujours à deux polarisations mutuellement orthogonales (pour le vecteur de déplacement  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ )...

Pour la propagation dans la direction des axes optiques, il y seulement une valeur de  $k$  et, par conséquent, seulement une vitesse de phase. Il y a, cependant, deux directions indépendantes de polarisation.

Les équations (4.2-8) et (4.2-9) sont souvent écrites en terme de la direction cosinus du vecteur d'onde. En utilisant la relation  $\mathbf{k} = (\omega/c) n \hat{\mathbf{u}}$  pour l'onde plane donnée par les équations (4.2-1), éq. (4.2-8) et (4.2-9) peuvent être écrites respectivement comme

$$\frac{u_x^2}{n^2 - \epsilon_x/\epsilon_0} + \frac{u_y^2}{n^2 - \epsilon_y/\epsilon_0} + \frac{u_z^2}{n^2 - \epsilon_z/\epsilon_0} = \frac{1}{n^2} \quad (4.2-10)$$

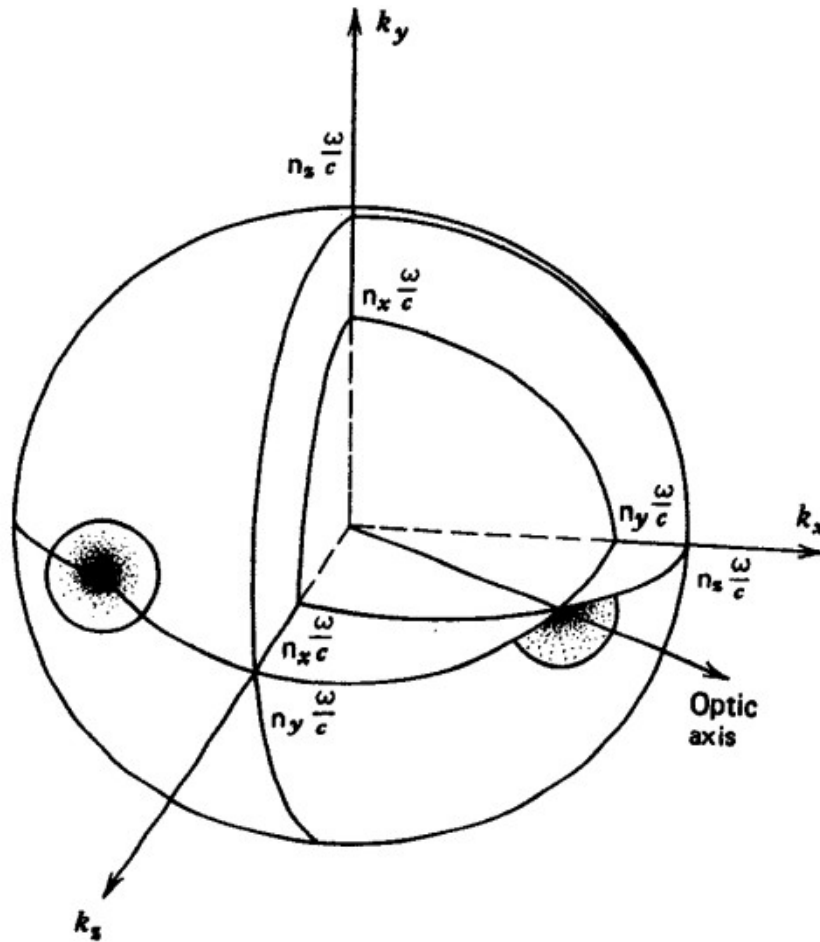


Figure 4.1. La surface normale/*surface des indices*

ici  $y$  est vers le haut,  $x$  vers la droite, et  $z$  vient vers nous. Puisqu'il s'agit des axes de  $\mathbf{k}$ , propagation, et que l'indice de réfraction,  $n$ , concerne les vecteurs de champ électrique (la vibration perpendiculaire)  $\rightarrow$  en intersection sur un axe de coordonnées on a les composantes  $n$  correspondant aux deux autres directions. De l'équation de Fresnel ou de (4.2-8) on sait qu'il y a deux solutions pour chaque direction  $\mathbf{k} \rightarrow$  la surface est composée de deux nappes. Sur les axes les coordonnées sont :  $(\omega/c) n$ , de (4.2-2-bis)

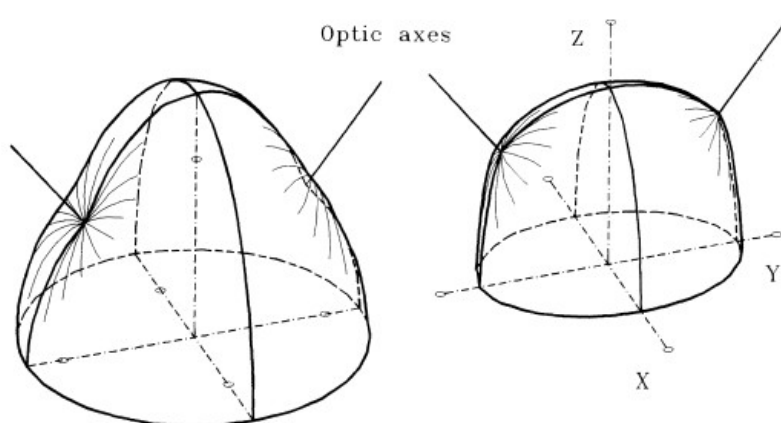


Fig. 4.1-bis de Agulló-López et al. (1994, p. 29) avec les deux nappes d'une demie *surface normale* dessinées séparément pour plus de clarté, et avec les axes optiques.

et

$$\begin{pmatrix} \frac{u_x}{n^2 - \epsilon_x / \epsilon_0} \\ \frac{u_y}{n^2 - \epsilon_y / \epsilon_0} \\ \frac{u_z}{n^2 - \epsilon_z / \epsilon_0} \end{pmatrix} \quad (4.2-11)$$

On retrouve l'éq. (5.57) de Peatross-Ware vu que  $\epsilon = \epsilon_0 n^2$  pour les diélectriques non magnétiques, qui correspond à  $E_x, E_y$  et  $E_z$ , verticalement pour une valeur de  $n$ .

"L'équation (4.2-10) [expansion d'un déterminant] est connue comme **équation de Fresnel** des ondes normales et peut être résolue pour les indices propres de réfraction, et l'équation (4.2-11) donne les directions de polarisation

L'équation (4.2-10) est une équation quadratique en  $n^2$ . Par conséquent, **pour chaque direction de propagation** (ensemble de  $u_x, u_y, u_z$ ) elle donne **deux solutions pour  $n^2$** ...

Pour compléter la solution du problème, nous utilisons les valeurs de  $n^2$ , **une par une, dans l'équation (4.2-11)**. **Cela nous donne les polarisations de ces ondes**. On peut voir que dans un matériau non absorbant ces valeurs propres sont polarisées linéairement, puisque toutes les composantes sont réelles dans (4.2-11). (on met en gras)

Laissons  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  être les vecteurs champ électrique et  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  être les vecteurs déplacement des ondes propres polarisées linéairement associées avec respectivement  $n_1^2$  et  $n_2^2$ . L'équation de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0^*$  implique que  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  soient orthogonaux à  $\hat{\mathbf{u}}$ .

\* = éq. (1.33) de Peatross-Ware vu propriété de divergence  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$  et  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$   
et voir plus haut explication suite à éq. (5.5) de Peatross-Ware

Puisque  $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0$ , les trois vecteurs  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ , et  $\hat{\mathbf{u}}$  forment une triade orthogonale qui peut être utilisée comme système de coordonnées pour la description de nombreux phénomènes physiques, incluant l'activité optique. Les équations de Maxwell impliquent aussi que  $\mathbf{D}, \mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  soient liés par

$$\mathbf{D} = -\frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{H} \quad (4.2-12)$$

et

$$\mathbf{H} = \frac{n}{\mu c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \quad (4.2-13)$$

D'après les eqs (4.2-12) et (4.2-13),  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  sont tous les deux perpendiculaires à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$ . Par conséquent la direction d'écoulement d'énergie donnée par le vecteur de Poynting  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  n'est pas, en général, colinéaire avec la direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$ .

En substituant l'eq (4.2-13) pour  $\mathbf{H}$  dans l'eq (4.2-12) et en utilisant l'identité de vecteurs

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}),$$

nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= -\frac{n^2}{c^2 \mu} \hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}) = \frac{n^2}{c^2 \mu} [\mathbf{E} - \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E})] \\ &= \frac{n^2}{c^2 \mu} E_{\text{transverse}} \end{aligned} \quad (4.2-14)$$

et puisque  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D} = 0$  et  $\frac{n^2}{c^2 \mu} = n^2 \epsilon$ ,

$$D^2 = \frac{n^2}{c^2 \mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = n^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (4.2-15)$$

Autrement dit,  $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ , et  $\hat{\mathbf{u}}$ , tous sont dans le même plan. On peut montrer que ces vecteurs champ satisfont les relations suivantes... :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 &= 0 \\ \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 &= 0 \\ \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_1 &= 0 \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D}_1 &= \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.2-16)$$

$\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  ne sont pas en général orthogonaux. La relation d'orthogonalité des modes propres de propagation est souvent écrite comme

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) = 0 \quad (4.2-17)$$

Cette dernière relation montre que l'écoulement de puissance dans un matériau anisotrope le long de la direction de propagation est la somme de la puissance portée par chaque mode individuellement.

#### 4.2.1. Propriétés d'orthogonalité des modes propres (p. 76)

Nous dérivons maintenant la relation d'orthogonalité (4.2-17) entre le deux modes propres de propagation le long d'une direction donnée  $\hat{\mathbf{u}}$ . Avec les éq. (4.2-1 qui est  $\mathbf{E} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ ), (4.2-2 qui est  $\mathbf{H} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ ) pour les champs vectoriels et le théorème de réciprocité de Lorentz, on obtient

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \quad (4.2-18)$$

Si nous substituons l'éq. (4.2-13) pour  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  dans l'éq. (4.2-18), elle devient

$$\frac{n_2}{\mu c} \hat{\mathbf{u}} \cdot [\mathbf{E}_1 \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_2)] = \frac{n_1}{\mu c} \hat{\mathbf{u}} \cdot [\mathbf{E}_2 \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_1)] \quad (4.2-19)$$

Cette équation peut encore être simplifiée en utilisant l'identité

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

et devient

$$\frac{n_2}{\mu c} (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_2) = \frac{n_1}{\mu c} (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_2) \quad (4.2-20)$$

Parce que cette équation doit s'appliquer quelque soit la direction de propagation avec  $n_1 \neq n_2$ , elle ne peut être satisfaite que lorsque les deux cotés disparaissent. Cela prouve

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = 0 \quad (4.2-21)$$

Pour résumer : le long d'une direction de propagation arbitraire  $\hat{\mathbf{u}}$ , il peut exister deux ondes planes indépendantes, modes de propagation polarisées linéairement. Ces modes ont des vitesses de phase  $\pm c/n_1$  et  $\pm c/n_2$ , ou  $n^2_1$  et  $n^2_2$  sont les deux solutions de l'équation de Fresnel (4.2-10).

En pratique ces indices de réfraction  $n_1, n_2$  et les directions de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{E}$  son trouvés le plus souvent, non pas par la procédure donnée ci-dessus mais en utilisant la méthode formellement équivalente de l'ellipsoïde des indices. Cette méthode est discutée dans la section qui suit.

### 4.3. L'ellipsoïde des indices (p. 77)

Les surfaces de **densité d'énergie électrique** constante,  $U_e$  dans l'espace  $\mathbf{D}$  donnés par l'éq. (4.1-7) peuvent être écrites comme

$$\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} = 2U_e \quad (4.3-0)$$

On part de (4.1-7) :  $2U_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ . De (4.1-6) :  $E_j = D_i / \epsilon_{ij}$  avec propriétés produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ , on arrive à cette équation (4.3-0).

- Rappel (McCall et al (2015 p. 21) : "On peut montrer de la théorie de l'électrostatique que la densité d'énergie  $\epsilon_0 \epsilon E^2/2$  [ici  $U_e$ , l'un des deux  $\mathbf{E}$  remplacé par  $\mathbf{D}$  à cause de l'anisotropie] est associée avec un champ électrique dans un milieu diélectrique isotrope... (...) ...Les ondes électromagnétiques qui voyagent dans le vide transportent de l'énergie dans la direction de propagation et l'écoulement d'énergie est partagé... (...) direction et taux d'écoulement...". L'intérêt ici étant qu'on va avoir son expansion spatiale irrégulière à cause de l'anisotropie.

où  $\epsilon_x, \epsilon_y$  et  $\epsilon_z$  sont les principales constantes diélectriques

$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (1 + \chi_{ij})$  de éq. (4.1-5), et encore  $\epsilon = \epsilon_0 n^2$  puisque l'indice de réfraction est défini par (Yariv et Yeh, p.11)  $n = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  mais  $\mu = \mu_0$  dans le cas des diélectriques non magnétiques.

Si nous remplaçons  $\mathbf{D}/\sqrt{2U_e}$  par  $\mathbf{r}$  [vecteur partant d'une origine de coordonnées  $x, y, z$ ] et définissons les indices de réfraction principaux  $n_x, n_y$  et  $n_z$  par  $n^2_i \equiv \epsilon_i / \epsilon_0$  ( $i = x, y, z$ ), cette dernière équation peut être écrite comme :

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (4.3-1)$$

i.e. dans (4.3-0), on fait la substitution :  $x = \frac{D_x}{\sqrt{2U}}$  ,  $y = \frac{D_y}{\sqrt{2U}}$  , et  $z = \frac{D_z}{\sqrt{2U}}$  , x, y, z comme coordonnées de  $\mathbf{r}$ , puis on remplace  $\epsilon_i = n_i^2/\epsilon_0 \dots \rightarrow$  on obtient éq. (4.3-1).

C'est l'équation d'une ellipsoïde générale avec les axes majeurs parallèles aux directions x, y et z [un choix arbitraire afin d'obtenir une image synthétique la plus simple possible] dont les longueurs respectives sont  $2n_x$ ,  $2n_y$  et  $2n_z$  [ $n$  caractérisant la vitesse de propagation du front d'onde, on imagine assez volontiers qu'il y ait un lien assez direct entre cette vitesse et la répartition d'un degré donné d'énergie apporté par le front d'onde dans le cristal]. L'ellipsoïde est **connue comme l'ellipsoïde des indices** ou, quelque fois, comme l'indicatrice optique. L'ellipsoïde des indices est utilisée principalement pour trouver les deux indices de réfraction [pour une direction quelconque de propagation, supposant l'ellipsoïde connue car on travaille toujours avec les mêmes minéraux, chacun représenté par une ellipsoïde qui lui est propre] et les deux directions de  $\mathbf{D}$  correspondantes **associées avec les deux ondes planes indépendantes qui peuvent se propager au long d'une direction** arbitraire  $\hat{\mathbf{u}}$  dans un cristal. (on met en gras) [dans ce cas la dualité de fronts d'onde se voit transcrite en la déformation d'un cercle, isotropie, en une ellipsoïde; l'équation de Fresnel donne deux valeurs d'où un diagramme avec deux nappes, alors que ici, en passant par l'énergie, on a la déformation d'un unique contour, et directement lié aux vitesses des fronts, via  $n$ ].

Cela est fait par les prescriptions suivantes : trouver l'ellipse d'intersection entre un plan passant par l'origine qui est perpendiculaire à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$  et l'ellipsoïde des indices (4.3-1). Les deux axes de l'ellipse d'intersection sont égaux en longueur à  $2n_1$  et  $2n_2$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont les deux indices de réfraction, c'est-à-dire, les solutions de (4.2-10 qui est l'équation de Fresnel, et cela pour cette direction de propagation là). **Ces axes sont parallèles, respectivement, aux directions des vecteurs  $\mathbf{D}_{1,2}$**  des deux solutions permises (voir Fig. 4.2)

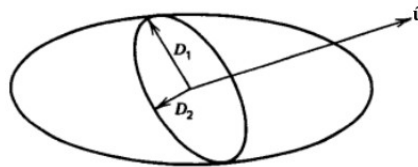


Figure 4.2. Méthode de l'ellipsoïde des indices. L'ellipse intérieure est l'intersection de l'ellipsoïde des indices avec le plan normal à  $\hat{\mathbf{u}}$  (Yariv et Yeh 1984 p. 78)

**Même chose commentée par Scharf (2007 p. 33) :** "L'ellipsoïde des indices est le lieu du *déplacement électrique*  $\mathbf{D}$  pour une énergie constante  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = U$ . Les axes d'une section elliptique normale au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  indiquent les directions des champs rapide et lent. Leur longueur correspond aux indices de réfraction"; "Parce que le traçage d'un rayon détermine la direction du vecteur d'onde plutôt que le vecteur de Poynting, l'ellipsoïde des indices est la surface la plus utile pour les calculs pratiques. Avec l'aide d'une construction géométrique, il est possible de trouver deux ondes planes indépendantes avec les polarisations orthogonales  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$  qui se propagent dans le matériau le long d'une direction donnée du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et leurs deux indices de réfraction correspondant  $n_1$  et  $n_2$ ."

Pour montrer que cette façon de faire est formellement équivalente à la méthode de la dernière section, on définit le tenseur d'imperméabilité  $\eta_{ij}$  comme

$$\eta_{ij} = \epsilon_0 (\epsilon^{-1})_{ij} \quad (4.3-2)$$

où  $\epsilon^{-1}$  est l'inverse du tenseur diélectrique  $\epsilon$ . En utilisant cette définition, la relation entre les vecteurs de champ  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  peut être écrit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \boldsymbol{\eta} \mathbf{D} \quad (4.3-3)$$

Substitution de l'éq. (4.3-3) pour  $\mathbf{E}$  dans l'équation d'onde (4.2-5 qui est  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0$ ) conduit à

$$\hat{\mathbf{u}} \times [\hat{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\eta} \mathbf{D}] + \frac{1}{n^2} \mathbf{D} = 0 \quad (4.3-4)$$

où nous avons utilisé  $\mathbf{k} = n(\omega/c) \hat{\mathbf{u}}$ , et  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unité dans la direction de propagation. Puisque  $\mathbf{D}$  est toujours transverse à la direction de propagation ( $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D} = 0$ ), il est approprié d'utiliser un nouveau système de coordonnées avec un axe dans la direction de propagation de l'onde, et de nommer les deux axes transverses par 1 et 2. Dans ce système de coordonnées le vecteur unité  $\hat{\mathbf{u}}$  est donné par

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3-5)$$

et l'équation d'onde (4.3-4) devient

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \frac{1}{n^2} \mathbf{D} \quad (4.3-6)$$

Puisque  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D} = 0$ , la troisième composante de  $\mathbf{D}$  est toujours zéro. On peut ignorer  $\eta_{13}$ ,  $\eta_{23}$  et définir un tenseur de perméabilité transverse  $\eta_i$  tel que

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \quad (4.3-7)$$

L'équation d'onde alors devient

$$\left( \eta_i - \frac{1}{n^2} \right) \mathbf{D} = 0 \quad (4.3-8)$$

où  $\mathbf{D}$  est le champ vectoriel de déplacement.

C'est une équation de matrice de type :  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{O}$ , avec  $\mathbf{A}$  matrice des éléments,  $\lambda$  valeur propre, et  $\mathbf{x}$  les vecteurs propres, avec ici respectivement le tenseur  $\eta_i$ , puis  $\lambda = 1/n^2$  et les vecteurs  $\mathbf{D}$  (cf. matrices, [ici](#) § IV-16-1)

Les vecteurs de polarisation des modes normaux sont des vecteurs propres du tenseur d'imperméabilité transverse avec des valeurs propres  $1/n^2$ . Puisque  $\eta_i$  est un tenseur symétrique  $2 \times 2$ , il y a deux vecteurs propres orthogonaux. Ces deux vecteurs propres,  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$ , correspondent aux deux modes normaux de propagation avec les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  respectivement.

Soit  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  les coordonnées d'un point arbitraire dans le nouveau système de coordonnées. L'ellipsoïde des indices dans ce système de coordonnées est exprimé par

$$\eta_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta = 1 \quad (4.3-9)$$

où l'addition sur les indices répétés  $\alpha, \beta$  (1, 2, 3) est assumée. L'ellipse d'intersection entre un plan ( $\xi_3 = 0$ ) passant par l'origine qui est normal à la direction de propagation et l'ellipsoïde des indices est obtenue en mettant  $\xi_3 = 0$  dans l'éq. (4.3-9). Ainsi nous obtenons l'équation suivante pour l'ellipse d'intersection

$$\eta_{11} \xi_1^2 + \eta_{22} \xi_2^2 + 2 \eta_{12} \xi_1 \xi_2 = 1 \quad (4.3-10)$$

Les coefficients de cette ellipse forment le tenseur d'imperméabilité transverse,  $\eta_i$ . Les vecteurs propres de ce tenseur  $2 \times 2$  par conséquent sont le long des axes principaux de cette ellipse. Les longueurs des axes principaux déterminent les valeurs de  $n$  en accord avec l'éq. (4.3-8). Cela prouve l'équivalence de la méthode de l'ellipsoïde des indices et la méthode de la dernière section.

#### 4.4. Vitesse de phase, vitesse de groupe (application laser non reprise ici) et vitesse d'énergie

La surface normale (surface de  $\omega$  constant dans l'espace  $\mathbf{k}$ ) décrit par éq. (4.2-8, de Fresnel) contient de l'information sur la vitesse de phase... La vitesse de phase d'une onde plane est définie par

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{u}} = \frac{c}{n} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.4-1) \quad (\text{Agulló-López et al. (1994, p. 23)})$$

(...) alors que la vitesse du flux d'énergie (aussi appelée la vitesse de rayon) est définie comme

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{S}}{U} = \frac{\mathbf{S}}{U} \hat{\mathbf{s}} \quad (4.4-3)$$

où  $\mathbf{S}$  est le vecteur de Poynting et  $U$  est la densité électromagnétique d'énergie. (...)

Agulló-López et al. (1994, p. 33) : de figures ou de calculs on voit que :

$$v_e = \frac{v_p}{\cos(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}})}$$

La vitesse de groupe est la même que la vitesse d'énergie, et définie comme :

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{v}_e$$

La définition de la vitesse de groupe implique que c'est un vecteur perpendiculaire à la surface normale.

#### 4.5. Classification des matériaux anisotropes (cristaux)

Nous avons montré ci-dessus que la surface normale contient bien de l'information sur la propagation d'onde dans les matériaux anisotropes. La surface normale est déterminée uniquement par les indices principaux de réfraction  $n_x, n_y, n_z$ . Dans le cas général lorsque les trois indices principaux  $n_x, n_y, n_z$  sont tous différents, il y a deux axes optiques. Dans ce cas, le cristal est dit être biaxial. Dans beaucoup de matériaux optiques, il se

trouve que deux des indices principaux sont égaux, dans quel cas l'équation pour la surface normale (4.2-8) peut être mise en facteur de la manière suivante

$$\left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \quad (4.5-1)$$

où  $n_o^2 = \epsilon_x / \epsilon_0 = \epsilon_y / \epsilon_0$ ,  $n_e^2 = \epsilon_z / \epsilon_0$ .

La surface normale dans ce cas consiste d'une sphère et d'une ellipsoïde de révolution. Ces deux nappes de surface normale se touchent à deux points sur l'axe z. L'axe z est donc le seule axe optique, et le cristal est dit uniaxial. Si tous les trois indices principaux sont égaux, les deux nappes de surface normale dégènèrent en une sphère unique et le cristal est isotrope optiquement. [tout cristal tombe donc dans un des trois groupes : biaxial, uniaxial ou isotrope]

Il est évident que la symétrie optique des cristaux est étroitement liée aux groupes ponctuels [un type de classification basé sur les symétries compatibles, rotation, réflexions...] des cristaux. Par exemple, dans un cristal cubique, les axes principaux sont équivalents physiquement. Donc on s'attend à ce qu'un cristal cubique soit isotrope optiquement. (...)

Dans les cristaux biaxiaux, les axes de coordonnées principaux sont nommé de telle manière que les trois indices principaux soient dans l'ordre suivant :

$$n_x < n_y < n_z \quad (4.5-2)$$

Avec cette convention les axes optiques sont dans le plan xz. La coupe des surfaces normales avec le plan xz et montrée en Fig. 4.3(a).

Dans un cristal uniaxial, l'indice de réfraction qui correspond aux deux éléments égaux  $n_o^2 = \epsilon_x / \epsilon_0 = \epsilon_y / \epsilon_0$  est appelé l'indice ordinaire  $n_o$ ; l'autre indice, correspondant à  $\epsilon_z$  est appelé l'indice extraordinaire,  $n_e$ . Si  $n_o < n_e$  le cristal est dit positif, alors que si  $n_o > n_e$  il est dit négatif. L'intersection avec des surfaces normales avec le plan xz est de nouveau montré en Fig. 4.3(b),(c). L'axe optique correspond à l'axe principal, qui a un indice de réfraction unique...

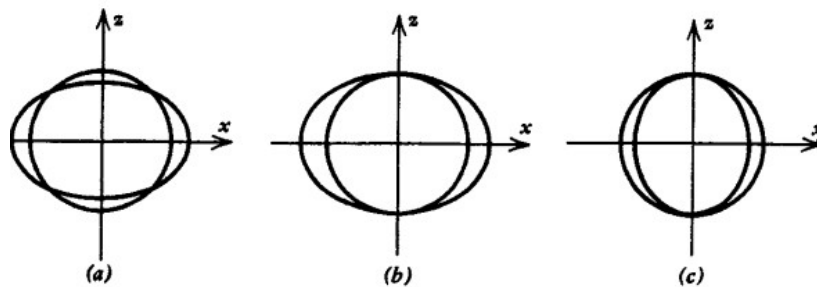


Figure 4.3. Intersection de la *surface normale/surface des indices* avec le plan xz pour (a) cristaux biaxiaux, (b) cristaux uniaxiaux positifs, (c) cristaux uniaxiaux négatifs.

## 4.6. Propagation de la lumière dans les cristaux uniaxiaux (p. 84)

Bien des appareil optiques modernes font usage de cristaux uniaxiaux. Des exemples courants sont le quartz, la calcite, et le niobate de lithium [LiNbO3]. Dans ces cristaux, l'équation (4.3-1) de l'ellipsoïde des indices se simplifie à

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (4.6-1)$$

où l'axe de symétrie a été choisi, en suivant les conventions, comme l'axe z.

La Figure 4.4 montre l'ellipsoïde des indices pour un cristal uniaxial positif.

La direction de propagation est le long de  $\hat{u}$ . Puisque l'ellipsoïde dans ce cas est invariante pour la rotation autour de l'axe z, la projection du vecteur  $\hat{u}$  sur le plan xy est choisie coïncider avec l'axe y sans perte de généralité.

En suivant les prescriptions données dans la section 4.3, nous trouvons d'abord l'intersection du plan normal à  $\hat{u}$  passant par l'origine avec l'ellipsoïde des indices. L'intersection est une ellipse dont le plan a été mis sur la figure. La longueur du demi axe majeur OA et égale à l'indice de réfraction  $n_e(\theta)$  du rayon "extraordinaire" dont le

vecteur de déplacement électrique  $\mathbf{D}_e(\theta)$  est parallèle à  $OA$ . Le rayon "ordinaire" est polarisé (i.e. a son vecteur  $\mathbf{D}$ ) le long de  $OB$ , et son indice de réfraction est égal à  $n_o$ .

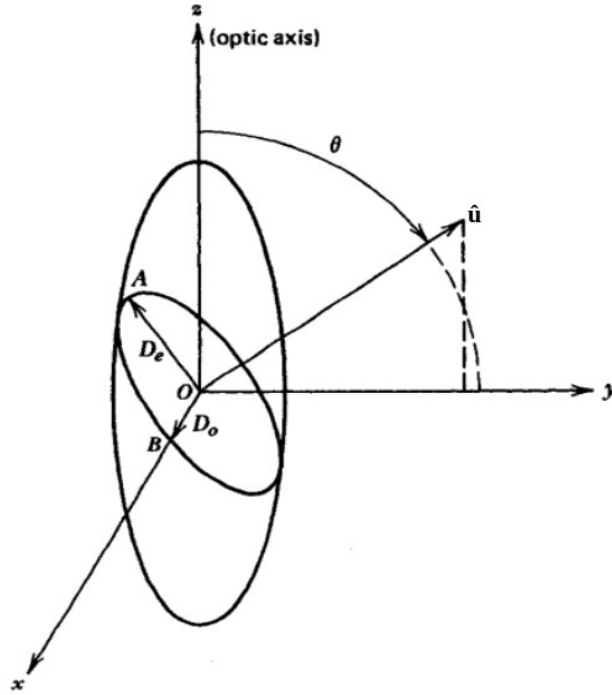


Figure 4.4. Construction pour trouver les indices de réfraction et la polarisation des modes normaux pour une direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$  donnée. La figure est pour un cristal uniaxial avec  $n_x = n_y = n_o$ ,  $n_z = n_e$ .

Soit  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde et  $\hat{\mathbf{z}}$  un vecteur unité dans la direction de l'axe  $z$ , les polarisations pour ces vecteurs déplacement sont données respectivement par

$$\mathbf{d}_o = \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}|} \quad (4.6-2)$$

$$\mathbf{d}_e = \frac{\mathbf{d}_o \times \mathbf{k}}{|\mathbf{d}_o \times \mathbf{k}|} \quad (4.6-3)$$

Il est clair de la Fig. 4.4 que, quand l'angle  $\theta$  entre l'axe optique et la direction de propagation  $\hat{\mathbf{u}}$  est changé, la direction de polarisation du rayon ordinaire reste fixée (le long de l'axe  $x$  sur la figure) et son indice de réfraction est toujours égal à  $n_o$ . D'un autre coté la direction de  $\mathbf{D}_e$  dépend de  $\theta$ , comme cela est montré. L'indice de réfraction varie de  $n_e(\theta) = n_o$  pour  $\theta = 0$  à  $n_e(\theta) = n_e$  pour  $\theta = 90^\circ$ . L'indice de réfraction  $n_e(\theta)$  du rayon extraordinaire est égal à  $OA$ , ce qui, d'après la Fig. 4.4 est donné par

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (4.6-4)$$

C'est l'application de l'équation cartésienne de cette ellipse, on a  $n_e \sin \theta$  et  $n_e \cos \theta$  à mettre aux numérateurs, au carré, puis on divise tout par  $n_e$ . On peut l'écrire (Scharf 2007, p. 35) :

$$n_e(\theta) = \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}$$

Les indices de réfraction pour le cas de propagation de la lumière dans un cristal uniaxial peuvent aussi être déterminés directement des surfaces normales (4.5-1). Si nous substituons  $k_z = n(\omega/c)\cos\theta$ ,  $k_x = 0$ ,  $k_y^2 = [(\omega/c)n]^2 - k_z^2$  dans l'éq. (4.5-1), nous obtenons, éq. (4.6-4) du premier facteur, et l'indice de réfraction ordinaire  $n_o$ , du second facteur. La direction de polarisation pour le champ électrique extraordinaire est donnée, de l'éq. (4-2-9) par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin \theta}{n_e^2(\theta) - n_o^2} \\ \frac{\cos \theta}{n_e^2(\theta) - n_e^2} \end{pmatrix}$$

où  $n_e(\theta)$  est l'indice de réfraction pour l'onde extraordinaire (4.6-4).

Notez que le vecteur champ électrique n'est, en général, pas perpendiculaire au vecteur de propagation.

L'intersection du plan  $yz$  avec les surfaces normales pour un cristal uniaxe positif ( $n_e > n_o$ ) est montré en Fig. 4.5.

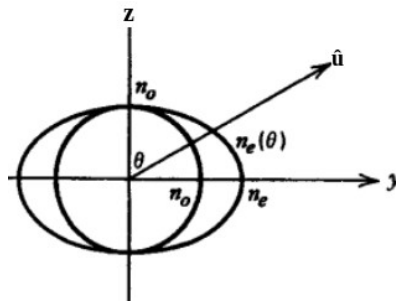


Figure 4.5. L'intersection du plan  $uz$  avec la *surface normale/surface des indices* pour un cristal uniaxe positif ( $n_e > n_o$ ).

et Scharf (2007 p. 51) :

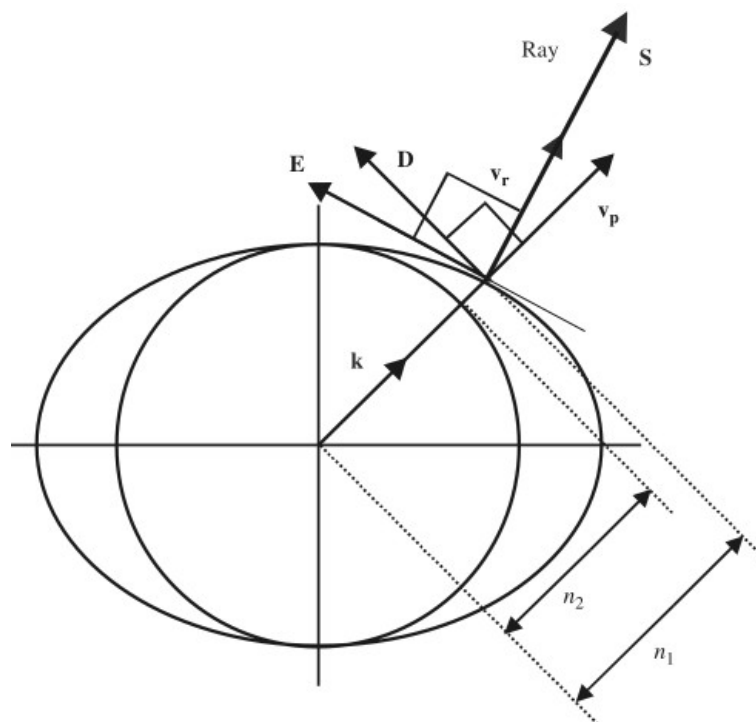


Fig. 4.5-bis. (Scharf 2007 p. 51 :) "Avec l'aide de la *surface normale/surface des indices* on peut visualiser les différentes quantités qui décrivent la propagation des ondes électromagnétiques. **D** est perpendiculaire à la direction de propagation **k** et à la vitesse de phase  $v_p$ . Le champ électrique **E** est perpendiculaire à la direction de **S** (écoulement d'énergie) et la vitesse de groupe  $v_r$ ."

▪ (Yariv et Yeh 1984,, p. 87) " **En résumé**, la propagation de la lumière dans une cristal uniaxe consiste en général en une onde ordinaire et une onde extraordinaire. Le vecteur champ électrique **E** (et le vecteur déplacement **D**) pour l'onde ordinaire est toujours perpendiculaire à la fois à l'axe  $z$  (axe dit  $c$  qui est  $z$ ) et au vecteur de propagation. La vitesse de phase pour l'onde ordinaire est toujours  $c/n_o$ , quelle que soit la

direction de propagation. Le vecteur de déplacement  $\mathbf{D}$  de l'onde extraordinaire, est perpendiculaire au vecteur de propagation comme l'est le vecteur  $\mathbf{E}$  de l'onde ordinaire. Le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  de l'onde extraordinaire, cependant, n'est en général pas perpendiculaire au vecteur de propagation. Il est situé dans le plan formé par le vecteur de propagation et le vecteur de déplacement. Les vecteurs champ électrique de ces deux ondes sont perpendiculaires entre eux."

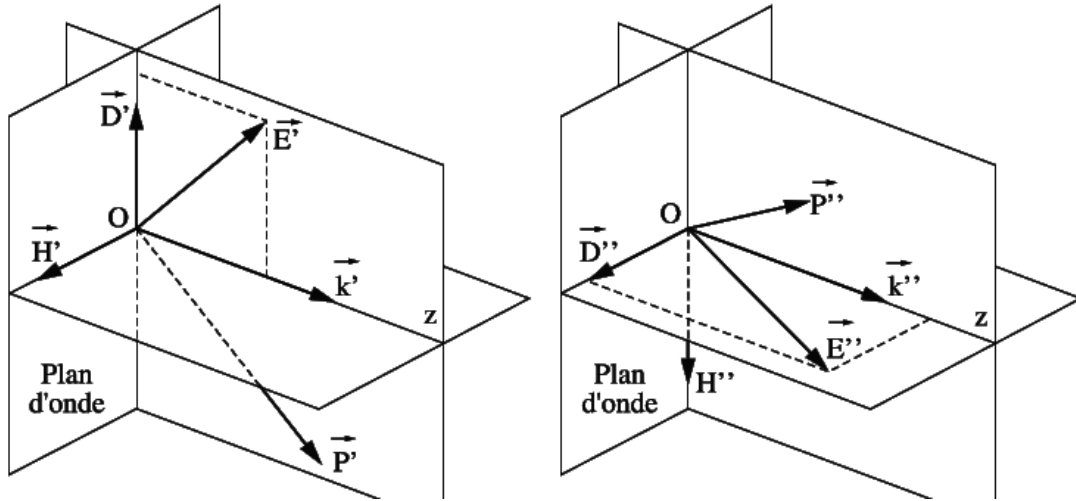


Fig. 4.5-ter. (Chartier (2003, p. 151))

Commentaire de la Fig. 4.5-ter, Chartier (2003, p. 151) :

"Les figures... représentent la disposition des différents vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{k}$  dans le cas d'une **propagation** se faisant selon l'axe  $Oz$ .  $\mathbf{D}'$  et  $\mathbf{D}''$  sont les deux directions de vibrations privilégiées qui sont associées à la direction  $Oz$  [correspondantes aux deux valeurs de l'indice de réfraction, qui cheminent ensemble, séparées artificiellement en ces deux schémas pour visibilité], elles sont orthogonales.

Les modules des **deux vecteurs  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$**  ne sont pas égaux, ce qui correspond au fait que **les deux vibrations correspondantes ne se propagent pas à la même vitesse**. On note que les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  sont dans le plan d'onde et que les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{k}$  sont contenus dans un même plan." (on met en gras)

suite Yariv et Yeh (1984) :

#### 4.7 Réfraction double sur une limite (= dioptré) (p. 88)

Considérez une onde plane incidente sur la surface d'un cristal anisotrope. L'onde réfractée en général, est un mélange de modes propres. Dans un cristal uniaxial, l'onde réfractée, en général, est un mélange de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire. D'après les arguments utilisés en connexion avec les réflexion et réfraction sur une bordure plane, **la condition aux limites demande** que tous les vecteurs d'onde soient dans le plan d'incidence et **que leur composantes tangentielles le long de la limite soient les mêmes**. Cette condition cinématique reste vraie pour la réfraction à la surface d'un cristal anisotrope. (on met en gras)

Soit  $\mathbf{k}_0$  le vecteur de propagation de l'onde incidente, et  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  les vecteurs de propagation des ondes réfractées. Pour une valeur prescrite de la projection du vecteur de propagation  $\mathbf{k}_0$  sur la surface, les deux nappes de la *surface normale* en général donnent deux vecteurs de propagation, ainsi produisant deux ondes réfractées comme le montre la Fig. 4.6.

La condition cinématique demande que :

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (4.7-1)$$

pour les ondes réfractées.

L'équation (4.7-1) ressemble à la loi de Snell. Cependant il est important de se rappeler que  $k_1$ ,  $k_2$  ne sont pas, en général constants; plutôt, ils varient avec les directions des vecteurs  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ . Le problème algébrique de la détermination de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  implique la résolution d'une équation quadratique. La méthode graphique est plus facile et montrée sur la Fig. 4.6.

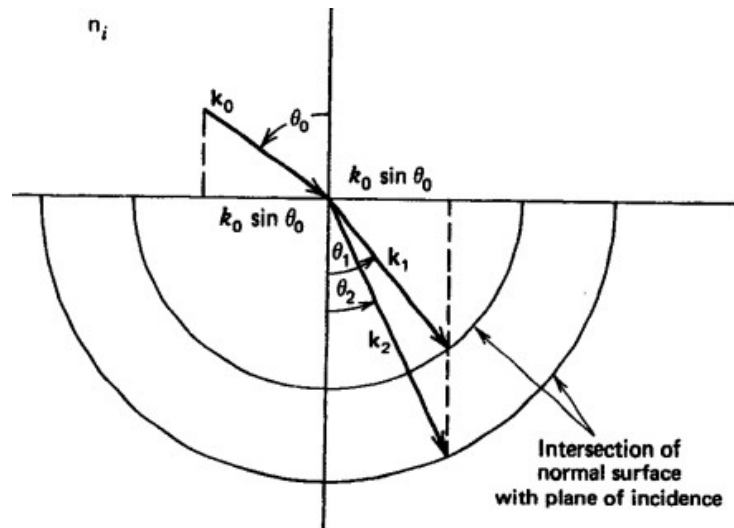


Fig. 4.6 Réfraction double sur une surface de matériau anisotrope et la méthode graphique pour déterminer  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . La figure représente le plan d'incidence. La définition (l'exigence) du problème physique veut que les composantes des vecteurs ondes sur la surface limite (qui s'appelle dioptre) soient égales. Ce sont ces "conditions aux limites" qui permettent de le résoudre. La (dite) *surface normale* ou *surface k* (= les deux nappes), est utilisée pour déterminer la direction des rayons lumineux. Les deux nappes sont circulaires, comme ici, lorsque l'axe optique d'un cristal uniaxe est dans le plan du dioptre et perpendiculaire au plan d'incidence; s'il ne l'est pas une des nappes est elliptique mais cela ne change rien à la règle.

Dans le cas des cristaux uniaxes, une nappe de la *surface normale* (*surface k*) est une sphère. Le nombre d'onde correspondant  $k$  est donc une constante pour toutes les directions de propagation. Cette onde est ordinaire et obéit à la loi de Snell,

$$n_i \sin \theta_0 = n_o \sin \theta_1 \quad (4.7.2)$$

où  $n_i$  est l'indice de réfraction du milieu incident et  $n_o$  est l'indice de réfraction ordinaire du cristal. L'autre nappe de la surface normale est une ellipsoïde de révolution. Par conséquent le nombre d'onde correspondant  $k$  dépend de la direction de propagation. Cette onde est l'onde extraordinaire."

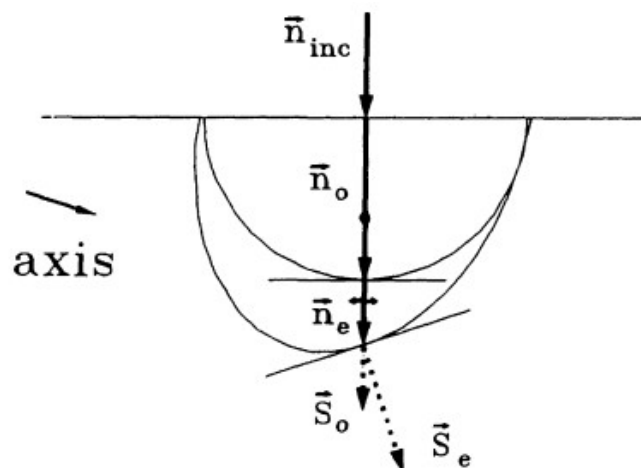


Fig. 4.6-bis. Agulló-López et al. (1994, p. 43) : "Section par le plan d'incidence de la surface normale d'un matériau uniaxial (positif) qui montre la limite avec un médium isotrope et les vecteurs d'onde impliqués dans la réfraction. Cas d'incidence normale, l'axe optique se trouve dans le plan d'incidence"

▪ Agulló-López et al. (1994, p. 41-2), "... phénomène de la double réfraction. Cela apparaît comme conséquence naturelle de l'occurrence de deux ondes qui voyagent à des vitesses différentes à l'intérieur du

cristal... Soit  $\mathbf{k}_i = (\omega/c)\mathbf{n}_i$  une onde plane incidente sur la surface d'un matériau anisotrope. En général l'onde transmise consistera en un mélange de deux modes de propagation  $\mathbf{k}_1 = (\omega/c)\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{k}_2 = (\omega/c)\mathbf{n}_2$  (ondes ordinaire et extraordinaire dans le cas des cristaux uniaxiaux) qui doivent se terminer à certains points de la surface normale... Bien que l'équation [4.7.2] ressemble à la loi simple de Snell pour les matériaux isotropes, notez que...  $n_2$  ... pas constant, mais dépendant de la direction, ce qui rend les calculs moins simples... La figure 4.6-bis illustre le cas d'un cristal uniaxial quand l'axe optique se trouve dans le plan d'incidence... pour l'onde ordinaire  $n_0$  est constant et donc la vraie loi de Snell s'applique... le vecteur de Poynting (direction de propagation de l'énergie) a aussi été représenté. Il est déterminé par la perpendiculaire à la surface normale... et en général... angle.. différent... de ... vecteur d'onde.. Même pour une incidence normale [Fig. 4.6-bis], ou  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  sont parallèles... rayon... peut suivre direction déviée de la normale et une double réfraction peut apparaître."

▪ Complément Scharf (2007)

Quantités correspondantes aux deux surfaces que l'on a vu avec Yariv et Yeh ci-dessus (p. 35-6)

Surface	propriété	coordonnées
Surface normale - k surface surface des indices	indices de réfraction, $n$ équation de Fresnel	vecteur d'onde, $\mathbf{k}$
ellipsoïde des indices	énergie constante $U (= \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$	déplacement électrique, $\mathbf{D}$

Or les déplacements électriques  $\mathbf{D}$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  sont perpendiculaires (produit scalaire  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{k} = 0$ ), par conséquent le grand axe de ces deux représentations sont perpendiculaires.

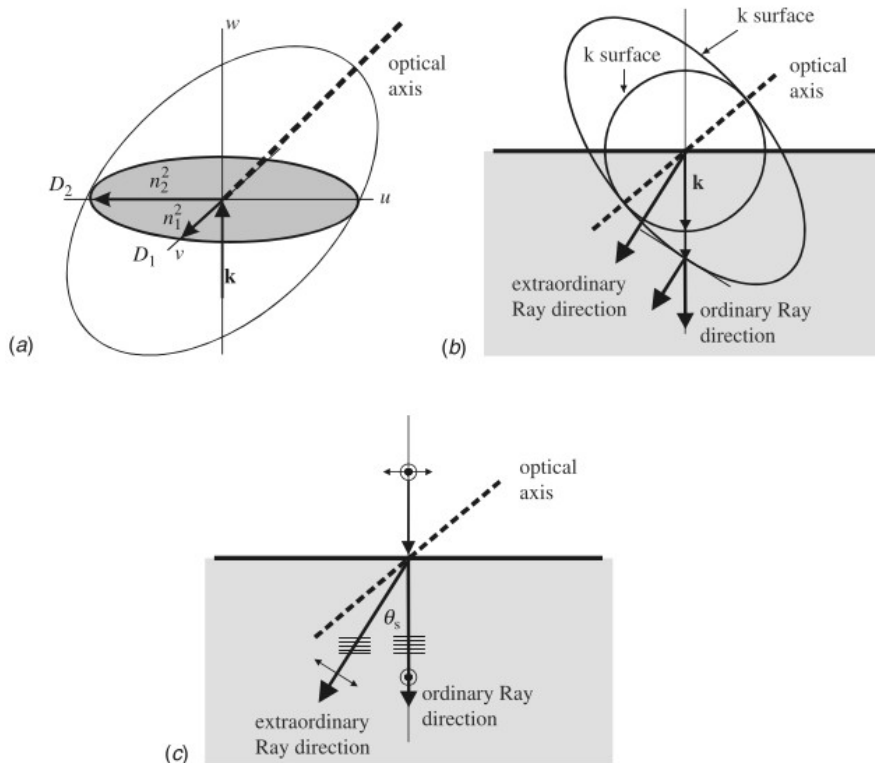


Fig. 4.7. Scharf (2007 Fig. 3.17 p. 60) : "Construction géométrique de rayons se propageant à travers l'interface entre des milieux isotrope- anisotrope pour une incidence normale par le dessus (cristal uniaxe). (a) L'ellipsoïde des indices est nécessaire pour trouver les modes normaux. (b) La surface normale est utilisée pour déterminer la direction des rayons. (c) montre les directions des rayons avec leur polarisation et front d'onde."

- Scharf (2007 p. 57) pour des cristaux uniaxes : "à cause de la relation analytique entre le vecteur d'onde et l'indice de réfraction, l'ellipsoïde des indices et la surface normale ( $k$  surface) sont d'aspect assez différent.

L'axe optique est défini comme cette direction de propagation dans laquelle n'existe qu'un vecteur d'onde, et par conséquent là où les deux nappes de la surface normale se touchent. Par comparaison, l'ellipsoïde des indices a son axe de symétrie qui coïncide avec l'axe optique (pour les systèmes uniaxiaux) le long de l'indice de réfraction le plus grand (ou constante diélectrique)... ...[surfaces normales]... ont la même symétrie que l'ellipsoïde des indices mais ont une forme différente."

- Scharf (2007 p. 58) "Pour trouver les modes normaux, on doit utiliser l'ellipsoïde des indices. L'ellipsoïde des indices est montrée en Fig. 4.7 (a). Le plan (vertical) d'incidence est le plan  $w-u$ . Les modes normaux  $D_1$  et  $D_2$  sont hors de ce plan dans la direction  $v$  et dans ce plan selon la direction  $u$ . Le mode normal  $D_1$  voit l'indice de réfraction  $n_o$  et représente la polarisation du rayon ordinaire. Le mode normal  $D_2$  voit un indice de réfraction effectif  $n_{eff}$ . Les constructions basiques pour déterminer les directions des rayons sont données en Figures 4.7 (b) et (c). On y montre le plan d'incidence. La lumière vient du dessus et entre dans le cristal. Les surfaces normales ( $\mathbf{k}$  surfaces) pour les propagations ordinaire et extraordinaire sont illustrées comme un cercle et une ellipse, respectivement. Les directions des rayons sont construites comme normales aux plans tangents pour les surfaces normales correspondantes. Pour une incidence normale, le rayon ordinaire (c'est avec le cercle) est donc toujours parallèle à  $\mathbf{k}$ . Cependant le rayon extraordinaire pointe dans la direction de la normale à la surface normale extraordinaire. Comme le montre la Figure 4.7, pour une incidence normale le rayon extraordinaire n'est pas dans la normale à l'interface. Ainsi **une incidence normale crée une réfraction oblique**. Notez cependant que le principe de la correspondance de phase est encore maintenu. Le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire ont des polarisations différentes. Dans les cristaux uniaxiaux les états propres de polarisation sont polarisés linéairement et les rayons ordinaire et extraordinaire sont donc polarisés linéairement. Dans le cas présent les états de polarisation sont orthogonaux. La *surface normale* ( $\mathbf{k}$  surface) permet de trouver l'angle de déviation  $\theta_s$  pour le rayon extraordinaire. Les normales à l'onde indiquées par le petit ensemble de lignes restent parallèle pour les deux rayons. La polarisation incidente contient les composantes TE et TM et est divisée à la surface."

## Annexe O.P. Ondes planes

Une onde est un état de perturbation qui est propagé d'une place à une autre à une vitesse finie. Ce qui passe est de l'énergie (non pas de la matière), Le type d'onde le plus simple que l'on connaît est la fonction trigonométrique, sinus ou cosinus (comme la petite oscillation du pendule) appelée une *onde harmonique simple de progression*.

Mais c'est seulement un exemple, la fonction trigo n'est pas nécessaire, toute fonction de la forme :

$$f(x - vt)$$

est répétitive, donc onde, ne change pas sa forme (quelconque).

### I. Onde harmonique une dimension

(par ex. Bekefi et Barrett, 1977, p. 118-121). Soit une corde souple infiniment longue disposée sur un axe  $x$  horizontal = traitement unidimensionnel le plus simple. Le déplacement  $s$ , vertical a) au temps  $t$  b) sur un endroit fixe arbitraire de  $x$ , est décrit mathématiquement par :

$$s(x, t) = s_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \phi\right) = s_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

*Nota : les fonctions cosinus et sinus toutes deux utilisables sont décalées de  $\pi/2$*

où :

-  $s_0$  est l'amplitude oscillante appliquée à la source, i.e. sa valeur maximale.

-  $\omega$  la fréquence angulaire ou pulsation, en gradient/sec =  $2\pi/T = 2\pi\nu$  ( $T$  période et  $\nu$  fréquence), cela afin d'avoir une forme plus compacte. C'est le nombre de tours par seconde compté en angle ( $d\theta/dt$ ). On a encore comme égalités :  $\omega = 2\pi(\nu/\lambda) = k\nu$  ( $\nu$  = vitesse).

un radian est l'angle  $\theta$  au centre d'un cercle interceptant un arc égal au rayon. Puisque  $2\pi$ -radians = 360, 1 radian =  $180/\pi \approx 57,29578$  et  $1^\circ = \pi/180$  radians  $\approx 0,017453...$  Les angles sont mesurés en radians, afin que  $\sin x$  et  $\cos x$  aient une période  $2\pi$ .

-  $\lambda$ , La longueur d'onde (m,  $\mu\text{m}...$ ) est la distance entre deux crêtes consécutives, parce que la fonction répète ses valeurs chaque fois que l'angle change de  $2\pi$  [ $\pi$  correspond à  $180^\circ$ , et  $2\pi$  au tour du cercle];

-  $k$  a été classiquement défini (afin de rendre l'équation plus compacte) comme "constante de propagation", "nombre d'onde"  $k = 2\pi/\lambda$  (donc unité 1/m ou  $1/\mu\text{m}$ , etc).  $k$  comme  $\lambda$  sont une mesure de la période spatiale; c'est la distance entre deux crêtes, elle ne varie pas. On a aussi  $k = \omega/\nu$ .

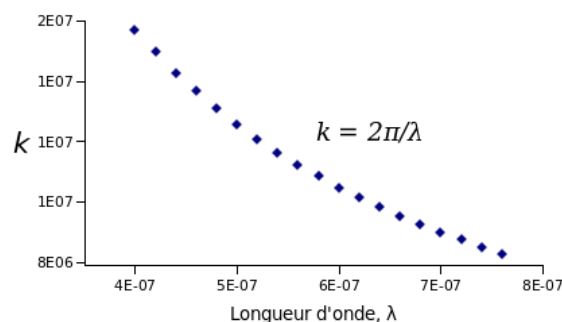
-  $\phi$  la phase relative au choix de l'origine du temps : si l'on n'a pas  $s = 0$  à  $x = 0$  et  $t = 0$ , on peut écrire l'onde en utilisant une phase constante supplémentaire appelée déphasage. La phase est très importante. Il y a les régions d'amplitude négative et d'autres d'amplitude positive de l'onde. Et suivant la phase deux ondes superposées peuvent s'ajouter ou s'annuler constamment en certains points si elles ont la même fréquence. Sur les raies brillantes, elles s'ajoutent; sur les raies sombres, elle s'annulent, etc.

On définit aussi

-  $T$ , la période (temporelle, en sec) =  $\lambda/\nu$  (sur la vitesse), c'est le temps pour qu'une onde parcoure la distance correspondant à une longueur d'onde. Aussi elle est inversement proportionnelle à la fréquence. =  $1/\nu$ ;

- La fréquence ( $\nu$ ) ,  $\nu = f = 1/T$ , le nombre de fois qu'un crête passe par un point donné (effectue un cycle complet) par seconde, en Hz (1/sec). C'est par exemple la caractéristique la plus sensible des sons à nos oreilles.

-  $\nu$  la vitesse ("v") constante de phase ou de propagation, qui est donc :  $\nu = \lambda/T$  et comme  $T = 1/f$ ,  $\nu = \lambda f$ , mais aussi =  $\omega/k$ .



s représente le déplacement de la corde par rapport à la position d'équilibre. Il y a deux variables qu'on peut faire varier séparément : la position  $x$  et le temps,  $t$  : pour un  $t$  donné on peut trouver la forme le long de  $x$ , pour un endroit donné, on peut voir l'effet du temps,  $t$ .

▪ Quelques propriétés de trigonométrie :

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\text{angle complémentaires : } \sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta), \text{ et } \cos \theta = \sin(\pi/2 - \theta)]$$

## II. Ondes planes

▪ **Hecht** (2002, p. 25)

"L'onde plane est peut-être l'exemple le plus simple d'une onde tridimensionnelle. Elle existe à un moment donné quand toutes les surfaces sur lesquelles une perturbation a une phase constante et forme une suite de plans, chacun généralement perpendiculaire à la direction de propagation. Il y a des raisons très pratiques d'étudier ce type de perturbation, l'une d'elle est qu'en utilisant des appareils optiques, on peut facilement produire de la lumière qui ressemble aux ondes planes.

L'expression mathématique pour un plan qui est perpendiculaire à un vecteur donné  $\mathbf{k}$  et qui passe par un point  $(x_0, y_0, z_0)$  est assez facile à trouver (Fig. 2.19)

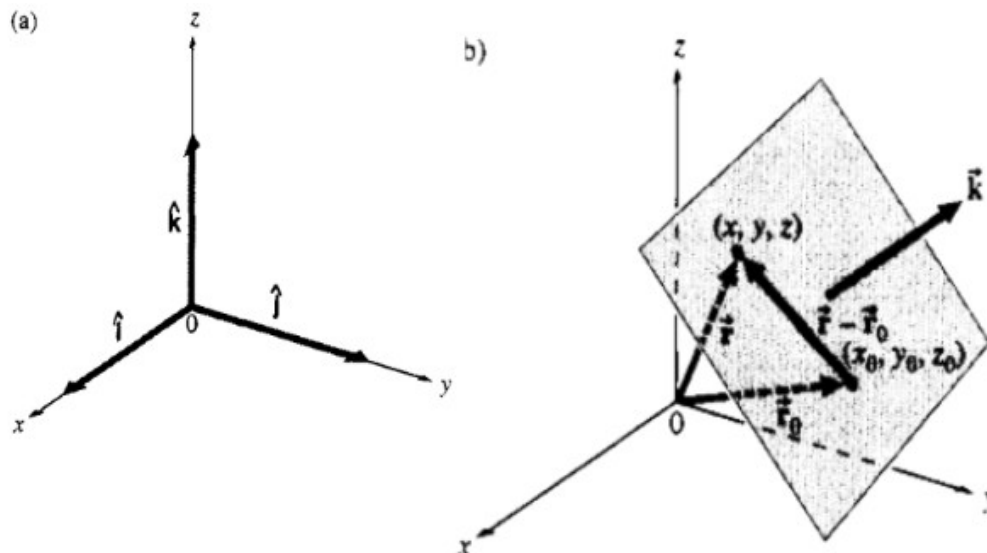


Figure 2.19 (a) Les vecteurs de unité de base cartésiens. (b) un plan qui bouge dans la direction  $\mathbf{k}$ .

D'abord nous écrivons le vecteur position en coordonnées cartésiennes en fonction des vecteurs unités de base (Fig. 2.19a),

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Il commence à un point d'origine 0 quelconque et fini au point  $(x, y, z)$  qui peut, pour l'instant, se trouver à un point quelconque de l'espace. De même,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

En imposant

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (2.38) \text{ produit scalaire}$$

on force le vecteur  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  à définir un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ , quand ses extrémités  $(x, y, z)$  prennent toutes les valeurs permises.

Avec

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}} \quad (2.39)$$

l'équation (2.38) peut être exprimée sous la forme

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0 \quad (2.40)$$

propriété produit scalaire :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

et  $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$

ou comme

$$k_x x + k_y y + k_z z = a \quad (2.41)$$

où

$$a = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = \text{constante} \quad (2.42)$$

La forme la plus concise de l'équation d'un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  est alors juste

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante} = a$$

(équation vectorielle du plan, voir aussi, [là](#) à vecteurs)

Le plan est le lieu de tous les points dont les vecteurs de position ont chacun la même projection sur la direction  $\mathbf{k}$ .

"On peut maintenant construire une série de plans sur lesquels  $\psi(\mathbf{r})$  varie de manière sinusoïdale dans l'espace, à savoir,

$$\psi(\mathbf{r}) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.44)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.45)$$

Pour chacune de ces expressions  $\psi(\mathbf{r})$  est constant sur chaque plan défini par  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$ . Puisque nous avons à faire à des fonctions harmoniques, elles devraient elles-mêmes se répéter dans l'espace après déplacement de  $\lambda$  dans la direction de  $\mathbf{k}$ . La figure 2.20 est une représentation assez humble de ce genre d'expression.

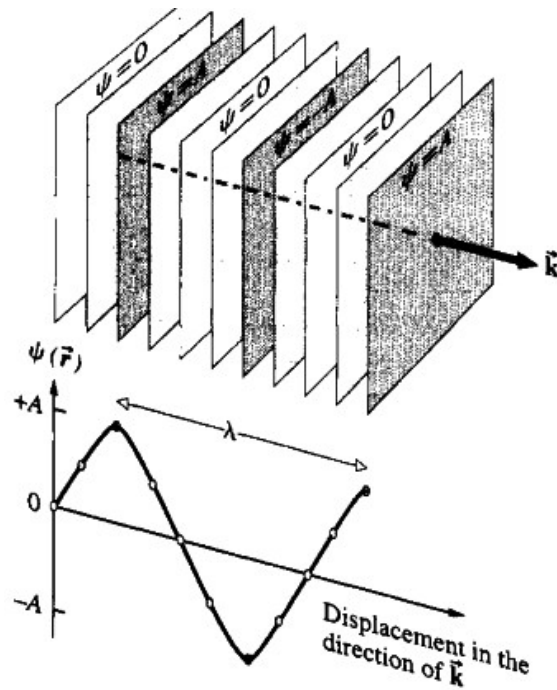


Figure 2.20 Front d'ondes plane harmoniques

Nous n'avons dessiné que quelque-uns d'un nombre infini de plans, chacun ayant une différente  $\psi(\mathbf{r})$ . Les plans auraient du aussi être dessinés avec une extension spatiale infinie, puisque aucune limite n'a été mise sur  $\mathbf{r}$ . La perturbation clairement occupe tout l'espace.

La nature répétitive dans l'espace de ces fonctions harmoniques peut être exprimée par

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi\left(\mathbf{r} + \frac{\lambda \mathbf{k}}{k}\right) \quad (2.47)$$

où  $k$  est la magnitude de  $\mathbf{k}$ , et  $\mathbf{k}/k$  est un vecteur unité (appelé  $\hat{\mathbf{u}}$  ailleurs dans le présent document) qui lui est parallèle (Fig. 2.21).

Il passe par la notation complexe

$$A e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = A e^{i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \lambda \mathbf{k}/k)} = A e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i \lambda k} \quad \text{qui entraîne} \quad e^{i \lambda k} = 1 = e^{i 2\pi}$$

et : "Donc

et

$$\lambda k = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Le vecteur  $\mathbf{k}$ , dont la magnitude est le *nombre de propagation*  $k$  (déjà introduit), est appelé le **vecteur de propagation**.

A tout point de l'espace où  $\mathbf{r}$  est constant, la phase est constante comme l'est  $\psi(\mathbf{r})$ . Bref les plans ne bougent pas.

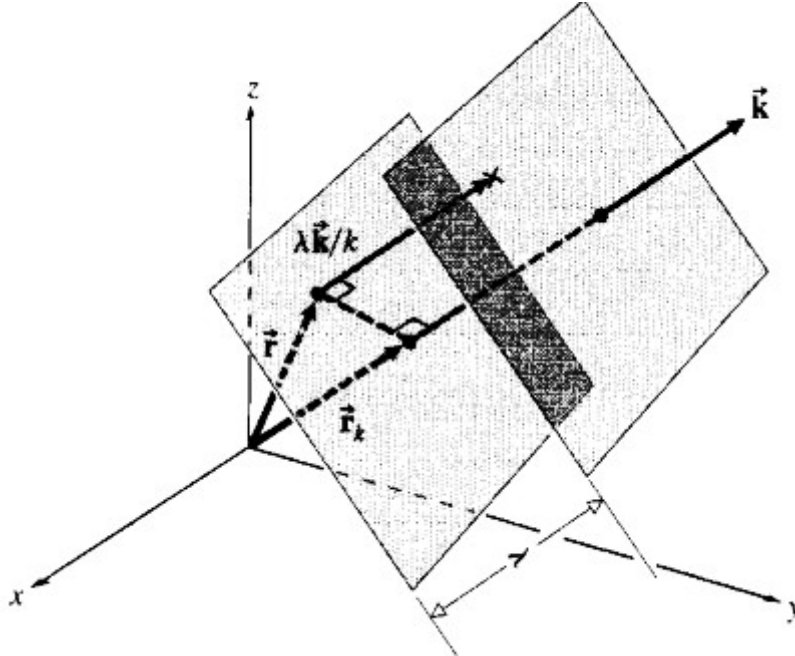


Fig. 2.21 Ondes planes

Pour faire bouger les choses on doit faire varier  $\psi(\mathbf{r})$  dans le temps, quelque chose que nous pouvons faire en introduisant la dépendance au temps de manière analogue à celle d'une onde unidimensionnelle.

Il le donne en notation complexe,  $\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$  en réel c'est : (2.48)

$$\psi(\mathbf{r}) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

avec  $A$ ,  $\omega$  et  $k$  constants. Comme cette perturbation voyage dans la direction  $\mathbf{k}$ , on peut assigner une phase lui correspondant à chaque point dans l'espace et le temps. A n'importe quel moment, les surfaces qui joignent tous les points de phase égale sont connus comme fronts d'onde. (...)

La vitesse de phase d'une onde plane donnée par (2.48) est équivalente à la vitesse de propagation du front d'onde. Dans la Fig. 2.21 la composante scalaire de  $\mathbf{r}$  dans la direction de  $\mathbf{k}$  est  $r_k$ .

La perturbation d'un front d'onde est constante, et donc après un temps  $dt$ , si le front se déplace le long de  $\mathbf{k}$  d'une distance  $dr_k$ , on doit avoir

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r_k + dr_k, t + dt) = \psi(r_k, t) \quad (2.49)$$

En forme exponentielle (complexe), c'est

$$A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} = A e^{i(kr_k + kdr_k \mp \omega t \mp \omega dt)} = A e^{i(kr_k \mp \omega t)}$$

produit vectoriel = rabattement de l'un sur l'autre (pour  $\mathbf{r}$  c'est  $r_k$ ) fois magnitude de l'autre vecteur, donc de Fig. 2.21,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr_k$

aussi il faut que

$$k dr_k = \pm \omega dt$$

La magnitude de la vitesse d'onde,  $dr_k/dt$  est alors

$$\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (2.50)$$

On aurait pu anticiper ce résultat en faisant une rotation du système de coordonnées de la Fig. 2.21 afin que  $\mathbf{k}$  soit parallèle à l'axe des  $x$ . Pour cette orientation

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(kx \mp \omega t)}$$

puisque  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k r_k = k x$ . L'onde a de cette manière été de fait réduite à une perturbation unidimensionnelle déjà discutée."

## Annexe P & J

### Polarisation et vecteurs de Jones

Paragraphe de Gbur (2011, p. 83) :

"Une onde de lumière qui voyage dans l'espace libre, loin de toutes limites matérielles, est généralement une *onde transverse*; c'est-à-dire que le champ électrique  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire à la direction de propagation. Supposons que nous avons une onde électromagnétique plane qui voyage dans la direction positive  $z$ , décrite par l'expression complexe :

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{ikz - i\omega t} \quad (\text{APJ-1})$$

où  $k$  est le nombre d'onde de l'onde,  $\omega$  est la fréquence angulaire, et  $\mathbf{E}_0$  est la **polarisation** de l'onde lumineuse, un vecteur généralement complexe qui se trouve dans le plan  $x$ - $y$ , i.e.  $\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ .

L'onde physique est simplement la partie réelle de (APJ-1).

La polarisation du champ peut être encore décomposée en ses composantes  $x$  et  $y$ , dans la forme :

$$\mathbf{E}_0 = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} \equiv \epsilon_x e^{i\phi_x} \hat{\mathbf{x}} + \epsilon_y e^{i\phi_y} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{APJ-2})$$

où  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$  sont des nombres à valeurs réelles non négatives, et  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont des valeurs réelles. Le comportement de la polarisation dans un plan à  $z$  fixé dépend des valeurs relatives de ces quatre paramètres.

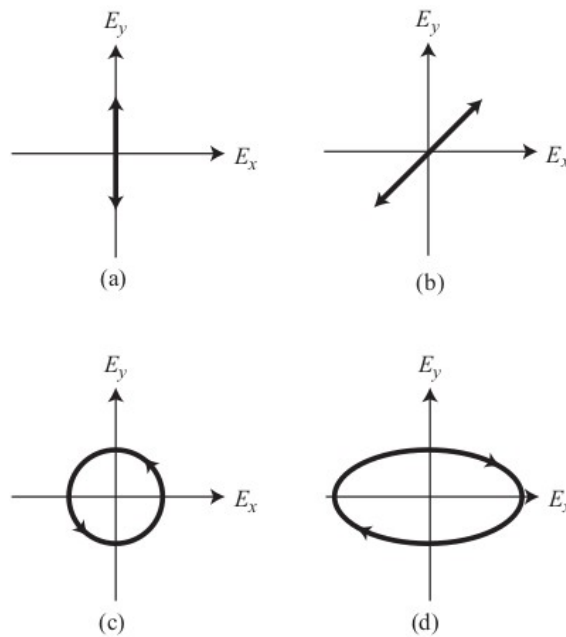


Fig. APJ-1. Les états possibles de polarisations différents d'une onde monochromatique : (a) polarisation linéaire avec  $\epsilon_x = 1$  et  $\epsilon_y = 0$ ; (b) polarisation linéaire, avec  $\epsilon_x = \epsilon_y$ ; (c) polarisation circulaire, avec  $\phi_y = \phi_x + \pi/2$ ; (d) polarisation elliptique, avec  $\epsilon_x = 2 \epsilon_y$  et  $\phi_y = \phi_x - \pi/2$ . Il faut aussi remarquer que, à cause de la phase, le champ électrique va dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre dans le cas (c) et dans le sens des aiguilles d'une montre dans le cas (d).

Les possibilités peuvent être résumées comme suit :

- Polarisation linéaire :  $\phi_y - \phi_x = 0, \pm\pi$ . Dans ce cas, la pointe du champ électrique oscille le long d'une ligne droite.
- Polarisation circulaire :  $\phi_y = \phi_x \pm \pi/2, \epsilon_x = \epsilon_y$ . Dans ce cas, la pointe du champ électrique suit un chemin circulaire.
- Polarisation elliptique : tous les cas non couverts ci-dessus. Pour une polarisation elliptique, la pointe du champ électrique suit un chemin elliptique.

La Fig. APJ-1 montre des exemples de ces cas.

On réfère au vecteur défini par l'Eq. APJ-2 comme **vecteur de Jones** du champ, d'après le scientifique qui l'a introduit. On peut voir de l'Eq. APJ-1 que le vecteur de Jones d'une onde plane n'est pas changé lors d'une propagation dans l'espace libre : un champ polarisé circulairement reste un champ polarisé circulairement lors de la propagation et ainsi de suite. Des dispositifs existent, cependant, qui peuvent transformer l'état de polarisation, tel que les polariseurs linéaires, les plaques quart-d'onde, les plaque de demi-onde..."

## Annexe U.G.

### Unités et grandeurs électromagnétiques

(unités en bleu)

UG-I. Électrostatique	57
Unité de charge (permittivité)	
Champ électrique (loi de Gauss)	
Potentiel électrique	
Capacité	
UG-II. Électrocinétique	59
Courant	
Densité de courant (lois d'Ohm)	
Énergie électrique et puissance (loi de Joule)	
UG-III. Électromagnétisme	61
UG-III-A. Induction magnétique créée par les courants établis (loi de Biot-Savart, théorème d'Ampère, loi de Gauss pour le magnétisme, force de Laplace)	
UG-III-B. Induction électromagnétique due aux variations (loi de Faraday)	

Il y a ou avait cinq systèmes différents d'unités : Électrostatique (esu), Électromagnétique (emu), Gaussien (combinaison de esu et emu), Heaviside-Lorentz et le dit Système International, S.I.

Les deux employés maintenant sont les systèmes gaussiens encore, mais cela pour études de particules individuelles chargées, sinon c'est essentiellement le S.I. Les quatre premiers cités utilisent le système d'unité dit cgs (centimètre, gramme, seconde), alors que le S.I dit aussi MKSA , utilise mètre, kilogramme, seconde, avec ampère comme quatrième dimension.

Ainsi par exemple le symbole **B** (induction magnétique) en soi dans le S.I., correspond à  $\sqrt{\mu_0/4\pi} \mathbf{B}$  dans le système gaussien.

(La mécanique quantique utilise par ailleurs essentiellement son système propre d'*unités atomiques*).

▪ Dans le S.I. deux nombres apparaissent dans les lois fondamentales de base,  $\epsilon_0$ , dans celle de Coulomb (électrique), et  $\mu_0$  dans celle de Biot-Savart (électromagnétisme) :

▪  $\epsilon$  (epsilon = "E" en grec) constante appelée **permittivité électrique** = mesure l'aptitude d'un matériel à "attraper" et stocker des charges électriques, sa *capacité* [électrique] sur la distance unité.

Dans le vide, valeur la plus basse possible,  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$  farad par mètre, F/m. C'est une valeur déduite.

▪  $\mu$  (mu = "M" en grec) constante appelée **perméabilité magnétique** qui mesure l'aptitude d'un matériel à accepter intérieurement des lignes/un champ, magnétique, i.e. sa faculté à accueillir/soutenir un champ **magnétique**, à être magnétisé. Par exemple on met un cœur en fer doux (i.e. très pauvre en carbone) au centre des bobines car ce fer doux a une grande *perméabilité* magnétique et donnera une inductance plusieurs centaines de fois plus élevée que si on laisse simplement de l'air.

Dans le vide, valeur la plus basse possible,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  en tesla·mètre/ampère, T·m/A, ou Henry par mètre, H/m. Il s'agit là d'une valeur définie exactement.

▪  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377$  ohms , dimension de résistance, et est appelée impédance de l'espace.

Est utilisé aussi :

*permittivité relative* =  $\epsilon/\epsilon_0$  = *constante diélectrique*, sans dimension donc (rapport)

*perméabilité relative* =  $\mu/\mu_0$  = perméabilité, sans dimension

Ces deux nombres ont du être introduits pour l'écriture des lois communes de l'électricité et magnétisme. C'est en voyant ces lois qu'on comprend leurs origines, but du petit briefing qui suit.

## UG-I. Électrostatique

### ▪ Unité de charge électrostatique, $q$ (coulomb)

(Jackson 1999, p. 778) L'unité de charge électrostatique,  $q$ , est définie par la **loi de Coulomb** dans le vide :

$$F_1 = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont les charges de 2 particules,  $r$  est la distance entre les charges,  $F_1$  est la force et  $k_1$  est une constante. Cette loi dit que la force est proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnel au carré du rayon.

Une force a l'unité de masse (M) fois la longueur (L) divisés par le temps au carré ( $t^2$ ), dont l'équation aux dimensions est :  $[F]=[MLt^{-2}] = N$  (newton), d'où ( $k_1 q_1 q_2$ ) a la dimension  $ML^3t^{-2}$ .

Dans le S.I./MKSA, l'unité de  $q$  est le **coulomb**, C

Le **coulomb** a été défini comme l'unité de charge véhiculée par l'unité de courant pendant l'unité de temps, i.e. la **charge véhiculée par un courant électrique de 1 ampère (A) pendant 1 seconde (s)**,

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

Tout se tenant, il fallait choisir de fixer l'un des paramètres, auquel les autres se rattachent, c'est l'ampère qui a été choisi pour ce rôle. On reviendra plus loin sur la définition de l'ampère.

Dans le S.I./MKSA la constante de proportionnalité  $k_1$  :

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \text{ C}^2$$

ou  $\epsilon_0$  est la **permittivité [électrique]**. Son unité S.I. est le farad/mètre, F/m, le farad étant l'unité de **capacité [électrique]** d'un milieu (ce que l'on voit ci-dessous), ce qui est équivalent à :

$$\mu \equiv \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt} \cdot \text{mètre}} ,$$

$\epsilon$  est donc une mesure de l'aptitude à "attraper" et stocker des charges électriques sur la distance unité. et "c" est la vitesse de la lumière :

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = (2,9979 \cdot 10^8)^2 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

$$\text{donc } \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Le problème avec la **loi de Coulomb** dans le système S.I était que si  $k_1$  était une mesure expérimentale de laquelle on déduirait le coulomb, alors si la mesure changeait cela affecterait la définition du coulomb. Aussi il a été opté de définir le coulomb par un autre moyen, l'ampère fixé ailleurs, qui définit  $k_1$ .

[Dans le système cgs la constante  $k_1$  est prise comme unité :  $4\pi\epsilon_0 = 1$

et l'unité de  $q$  est le esu (= statcoulomb = franklin,  $fr$ )

1 esu =  $3,33564 \cdot 10^{-10}$  C, et 1 coulomb  $\approx 3 \cdot 10^9$  esu.]

### ▪ Le champ électrique, $E$

Le premier champ à être défini est le champ électrique  $E$ . C'est une quantité dérivée prise comme étant une force par unité de charge :

$$E = \frac{F}{q} = k_1 \frac{q}{r^2}$$

avec  $k_1 = 1/4\pi\epsilon_0$  de ci-dessus, qui est inversement proportionnel à la permittivité. Cette force agira sur une unité de charge positive en tout point. On voit que la grandeur du champ électrique est en newton par coulomb,

$$E \equiv \frac{1\text{N}}{1\text{C}} = \frac{1\text{J}}{1\text{C} \cdot \text{m}}$$

Le champ dû à une charge est dirigé radialement: si  $q$  est positive, le champ est positif est dirigé extérieurement le long du rayon; si  $q$  est négative, le champs est dirigé intérieurement vers la charge.

Si plusieurs charges,  $q_j$  sont présentes dans le champ, le champ est le vecteur somme des champs produits à P par chacune des charges. On peut écrire cela :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j \mathbf{e}_j}{r_j^2}$$

où  $r_j$  est la distance entre le point P et la position de la charge,  $q_j$ , et  $\mathbf{e}_j$  est le vecteur unité dans la direction de la charge  $q_j$  au point P. C'est le principe de superposition. Cette somme à trois dimensions donne le champ électrique net produit par la densité de charge  $\rho$  qui existe dans le volume V.

Suite à quelques manipulations mathématiques cette formule peut être écrite sous la forme (Peatross et Ware 2015, p. 26) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

connue comme **loi de Gauss** : divergence de  $\mathbf{E}$  proportionnelle à la densité de charge.

- Concept de champ : il est créé et il est ressenti par des charges, c'est une histoire d'interaction, entre charges.

C'est complètement analogue au champ de gravitation avec les petites exceptions que :

- a) les charges peuvent être soit positives, soit négatives alors que les masses sont toujours positives,
- b) les masses s'attirent toujours alors que les charges de même signe se repoussent.

### ▪ Le potentiel électrique

(Castellan 1983 Appendix II) : "Le potentiel électrique, V, à n'importe quel point est le travail requis pour bouger une unité de charge positive d'une distance infinie [équivalent à potentiel zéro car  $r \rightarrow \infty$ ; par convention le potentiel de la surface de la Terre est considéré comme tel] au point en question. Puisque  $E$  est la force qui agit sur une charge d'unité positive, on peut écrire :

$$V = \int_{\infty}^r E(-dr) = \int_{\infty}^r (-E) dr$$

Si comme exemple on prend l'expression du champ E vue plus haut :

$$V = \int_{\infty}^r \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

De l'avant dernière équation il suit que  $E = \partial V / \partial r$ . Ainsi, si nous connaissons le potentiel, nous pouvons obtenir la composante radiale du champ en différenciant par rapport à  $r$ . De manière plus générale nous pouvons écrire :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

Les composantes du champ sont obtenues en différenciant le potentiel par rapport aux coordonnées.

Par le principe de superposition, le potentiel en tout point est la somme des potentiels produits par toutes les charges. Ainsi :

$$V = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_j}$$

Puisque cette formule implique seulement l'addition de quantités scalaires, elle est plus facile à construire que l'équation somme du champ électrique. Après que le potentiel a été calculé par cette formule, les composantes du champ dans les directions désirées peuvent être calculées en différenciant par rapport aux coordonnées.; utilisez les équations  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  ci-dessus."

- Le potentiel est défini comme un travail (W), qui par définition lie une force à un déplacement/distance ( $l$ , ici dans un espace champ électrique). Il est donc défini par rapport à un potentiel de référence ou la différence entre deux potentiel nommés,

$$dW = V_1 - V_2 = E \cdot dl \text{ (champ électrique uniforme),}$$

et ce travail est rapporté à la charge concernée, l'unité de différence de potentiel est le volt :

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}}$$

et on voit alors que le champ électrique s'exprime en V/m :  $E \equiv \frac{\text{Volt}}{\text{mètre}}$

- Comme dans le cas du champ de gravitation, on peut montrer que ce travail est indépendant du chemin suivi.

### ▪ Capacité

Pour un conducteur isolé dans l'espace, il y a proportionnalité entre la charge Q qu'on lui applique et le potentiel qu'il prend :

$$\frac{Q}{V} = \text{cte} = C$$

qui dépend de sa forme géométrique.

La constante C s'appelle la capacité du conducteur. Elle s'exprime en farad (nommé d'après Faraday) :

$$1 \text{ F} = 1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}$$

C'est une unité très grande et on utilise les sous-multiples, micro et pico :  $\mu\text{F}$ ,  $\text{pF}$ .

▪ Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques proche l'une de l'autre (ce qui fait que leur charges opposées  $|q|$  sont  $\sim$  égales valeur absolue). Si  $V_1 - V_2$  est la différence de potentiel entre les deux armatures, la capacité du condensateur est donnée par  $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$ .  $C$  est dépendante de la géométrie du condensateur. Par exemple, pour deux armatures métalliques parallèles distantes de  $d$  et de surface en regard  $S$  :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$  (ex. si c'est 2 plaques circulaires de rayon 2 cm séparées par 2,8 millimètres d'air,  $C = 4 \cdot 10^{-6} \mu\text{F}$ )

Lors de sa décharge, un condensateur peut fournir l'énergie  $W = \frac{1}{2} C \Delta V^2$

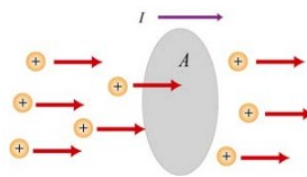
## UG-II. Électrocinétique

### ▪ Force électromotrice

Dès lors que l'on parle de courant/densité de courant, il y a nécessairement une source d'énergie électrique, qui maintient une différence de potentiel, force électromotrice de symbole  $\mathcal{E}$ ; une 'pompe à charges' qui déplace les charges de potentiel bas vers le potentiel haut, dit générateur. C'est le résultat d'un travail dont l'unité en S.I. est le Volt = Joules/coulomb.

### ▪ Le courant.

Les courants électriques sont des écoulements de charges électriques. Prenons une collection de charges qui se déplacent perpendiculairement à un plan de surface  $A$  :



L'intensité de courant électrique  $I$  est défini par le **taux** par lequel les charges s'écoulent à travers le plan de surface  $A$ .

$$I = \frac{dq}{dt}$$

C'est le lien indélébile avec  $q$  de l'électrostatique, et cela signifie que la dimension du rapport de charge sur courant est celle du temps.

L'unité, nommée ampère,  $A$ , est :

$$1 \text{ ampère} = 1 \text{ A} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ seconde}}$$

Pour les fils conducteurs dans la pratique  $I$  est pris comme un scalaire, une quantité macroscopique.

Le courant s'écoule dans les solides conducteurs, les liquides (électrolytes, ionisés) et les gaz (ionisés).

Des courants communs vont de mega-ampères dans les éclairs, à des nano-ampères, dans nos nerfs.

Puisqu'un écoulement a une direction, il y a une convention. La direction du courant correspond à la direction dans laquelle les charges positives s'écoulent. Cette convention qui a été maintenue, vient des débuts de l'électricité (Benjamin Franklin) quand il n'y avait pas de moyen de distinguer entre un écoulement de charges positives et négatives. "Ainsi dans un circuit, la direction conventionnelle pour l'écoulement du courant est du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas : par exemple, du pôle positif d'une pile à travers le circuit externe au pôle négatif... Puisque les électrons sont chargés négativement, leur direction de mouvement est opposé à celui de l'écoulement de courant conventionnel." (Bleaney et Bleaney 1976 p. 60).

### ▪ La densité de courant et les lois d'Ohm

La densité de courant,  $\mathbf{J}$ , est un concept à l'échelle microscopique étroitement liée à la quantité macroscopique d'intensité de courant,  $I$ . Le courant total à travers une surface peut être écrit comme :

$$I = \iint \mathbf{J} d\mathbf{A}$$

La magnitude de la densité de courant  $\mathbf{J}$  à tout point dans l'espace est la quantité de charge par unité de temps par unité de surface qui s'écoule passant à ce point,

$$|\mathbf{J}| = \frac{dq}{dt dA} = \frac{I}{dA} \quad \text{unité : ampères par mètres carrés : } A/m^2$$

La quantité totale de charge  $dq$  est égale au nombre,  $n$ , de porteurs de charge  $q$  fois le volume. Le volume est la surface fois la longueur de fil, et cette dernière est la vitesse,  $v_d$ , fois le temps (vitesse = distance/temps), d'où le courant  $\mathbf{J}$  peut être écrit :

$$\mathbf{J} = n q \mathbf{v}_d$$

$\mathbf{v}_d$  est un vecteur et  $\mathbf{J}$  est un vecteur qui pointe dans la même direction que  $\mathbf{v}_d$  (pour des charges positives selon la convention).

- De l'électrostatique, une force électrique s'applique sur un électron dans un champ,  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ .

On trouve expérimentalement que dans un conducteur métallique à température constante, la densité de courant est proportionnelle linéairement avec la force du champ électrique, c'est la **Loi d'ohm "microscopique"** :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{loi d'Ohm micro})$$

où la constante  $\sigma$  est connue comme **conductivité** et son inverse est la **résistivité**  $\rho$  :  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$

L'unité de  $\sigma$  est donc :

$$\sigma \equiv \frac{A}{V \cdot m} \quad \text{qui est le siemens par mètre, S/m.}$$

$\mathbf{E}$  est un vecteur et  $\mathbf{J}$  est aussi un vecteur.

- Si une différence de potentiel  $\Delta V$  est appliquée à chaque bout d'une longueur  $l$  du fil conducteur créant un champ électrique  $E$  et un courant  $I$ , de l'électrostatique :  $\Delta V = E l$  et  $E = \Delta V / l$ , et donc  $J = \sigma (\Delta V / l)$

Comme  $J = I/A$ ,  $\Delta V = I l / (A \sigma)$

Si l'on pose  $R = l / (A \sigma)$ , résistance du conducteur, on obtient :

$$\Delta V = R I \quad (\text{loi d'Ohm macroscopique})$$

différence de tension dans un circuit = courant  $\times$  résistance.

L'unité S.I. de  $R$  est l'ohm ( $\Omega$ , lettre grecque omega) :

$$1 \text{ ohm} = 1 \Omega = \frac{1 V}{1 A}$$

alors que la résistivité du matériel  $\rho$  est en ohm-mètres :  $\rho \equiv \Omega \cdot m$ .

Est aussi défini la conductance,  $G = 1/R$ , dont l'unité est le sievert :

$$1 \text{ siemens} = 1 S = \frac{1 A}{1 V} = \frac{1}{1 \Omega}$$

alors que la conductivité du matériel,  $\sigma (= 1/\rho)$  vue plus haut est en siemens par mètre.

### ▪ Énergie électrique et puissance

(Griffiths p. 91) Si on veut déplacer une charge  $q$  dans un champ électrique entre deux points a et b distants de  $dl$ , la force du champs étant  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , il faudra appliquer une force  $-q\mathbf{E}$ , et le champ  $\mathbf{E}$  étant un gradient du potentiel ( $\mathbf{E} = -\nabla V$ ), le travail est,

$$W = \int_a^b \mathbf{F} dl = -q \int_a^b \mathbf{E} dl = q(V_b - V_a) \quad \text{soit } V_b - V_a = W/q$$

ou par rapport à un point de référence sous-entendu,  $V = W/q$

(Griffiths p. 301) "En résultat des collisions, le travail fait par la force électrique est converti en chaleur dans un matériau résistant [ou transférée en partie mécanique s'il y a un moteur électrique]. Puisque le travail fait par unité de charge est  $V$  et la charge qui s'écoule par unité de temps est  $I$ , la puissance délivrée est

$$P = V I = I^2 R$$

C'est la loi effet Joule avec  $I$  en ampères et  $R$  en ohms,  $P$  vient en watts (joules par seconde)"

$$1 \text{ watt} = 1 W = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ seconde}} = 1 \text{ volt} \cdot \text{ampère}$$

$$1 \text{ joule} = 1 V \cdot A \cdot \text{sec}$$

Si on est en régime permanent, grâce à un générateur, la charge  $q$  qui traverse une section quelconque est proportionnelle au temps  $t$ , et on a  $q = I t$  d'où  $W = V I t$ , et, si l'on est intéressé par de l'énergie thermique, en employant la loi d'Ohm macroscopique on arrive à la **loi de Joule** :

$$W = R I^2 t \quad (\text{joules})$$

Cela permet de mesurer le Joule. Officiellement :

"On définit le Joule comme la quantité de chaleur dégagée par un courant de 1 ampère qui passe dans une résistance égale à un ohm pendant une seconde",

la loi de Joule apportant que sa quantité est directement proportionnelle au carré du courant.

On a vu (avec le potentiel électrique) la relation :  $1 \text{ joule} = 1 \text{ volt} \times 1 \text{ coulomb}$ .

- En énergie cinétique la définition du joule est le travail réalisé en appliquant une force de 1 newton sur une distance de 1 mètre,  $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ , i.e. force  $[M][L][T^{-2}]$  fois distance  $[L]$

$$[E]=[1/2 mv^2] = [M](L/T)^2 = [M][L^2][T^{-2}]$$

Comme le watt est pour une seconde, 1 watt-heure = 3600 joules.

Comme la *loi de Joule* fait intervenir  $I^2$ , l'effet de joule ne dépend pas du sens du courant.

Applications directes : les ampoules à incandescence, fusibles, radiateurs électriques...

## UG-III. Électromagnétisme

### UG-III-A. Induction magnétique créée par les courants établis (magnétostatique)

Si une charge électrique solitaire crée un champ électrique, une charge électrique en mouvement, **additionnellement**, crée un champ d'**induction magnétique**

La loi de force magnétique analogue à la loi de Coulomb est (Peatross et Ware 2015, p. 27) :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{force de Lorentz})$$

où  $q$  et  $\mathbf{v}$  sont charge et vitesse de la charge, et dans quel force,  $\mathbf{B}$  le champ magnétique induit :

$$\mathbf{B} = k_2 \frac{q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Comme dans la loi de Coulomb pour le champ électrique, le champ d'induction est proportionnel à la charge et diminue en  $r^{-2}$  et dépend d'une constante, ici  $k_2 = \mu_0/4\pi$ , dont on va reparler plus bas parce qu'elle est une base dans les définitions du S.I.

La différence avec la loi de Coulomb est que le champ ne pointe plus le long de  $\hat{\mathbf{r}}$  mais lui est au contraire perpendiculaire, à cause du produit vectoriel, qui est une traduction mathématique d'un constat expérimental et qui a été pris comme axiome de la théorie.

Les unités S.I. sont telles que  $\mathbf{B}$  soit en newtons par ampère-mètre appelé teslas, T :

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = \frac{1 \text{ newton}}{1 \text{ ampère} \cdot 1 \text{ mètre}} = \frac{\text{weber}}{\text{mètre carré}}$$

unité d'une force, le newton, par ampère et par mètre (weber défini plus bas avec le flux d'induction).

Et la **loi de Biot-Savart**, c'est passer de charges à courants, en remplaçant  $q\mathbf{v}$  par  $I d\mathbf{s}$  :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Le  $d\mathbf{s}$  dans cette formule est une petite unité de longueur de fil qui porte le courant  $I$ , de telle manière que  $I d\mathbf{s}$  joue le même rôle que le fait  $dq$  quand on calcule des champs électriques d'une distribution continue de charge. Pour trouver le champ magnétique total à un point dans l'espace on intègre sur la distribution du courant (e.g. sur la longueur du fil), additionnant le champ généré par chacune de ses petites parties  $d\mathbf{s}$ . Et pour une distribution donnée de courant, la perméabilité  $\mu_0$  (dont on reparle plus loin) dicte la force du champ magnétique.

En magnétostatique, i.e. quand le courant électrique reste constant, la loi de Biot-Savart joue un rôle analogue à la loi de Coulomb en électrostatique. Comme pour la loi de Coulomb, quelques raisonnements/manipulations mathématiques permettent d'écrire cette formule sous la forme (Peatross et Ware 2015, p. 28) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

qui est connue comme **loi de Gauss pour le magnétisme**. Elle est d'aspect similaire à la loi de Gauss pour les champs électrique sauf que maintenant, la divergence est nulle, ce qui ne pourrait être le cas s'il existait des "point charge magnétique". Cette loi implique que le flux magnétique total qui sort d'un petit volume fermé doit être contrebalancé par autant de lignes de champ qui pointent sur l'intérieur du même volume.

▪ Carimalo (n.d., p. 162) : "Il résulte de cette propriété que le champ magnétique *dérive* d'un vecteur, c'est-à-dire qu'il existe au moins un champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Ce nouveau champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  est appelé **potentiel vecteur**... celui-ci n'est pas défini de manière univoque par cette relation... a tout au moins l'avantage de dégager certaines propriétés générales... le *potentiel vecteur* est... de nature polaire... si les courants sont inversés le potentiel vecteur change de signe."

- Les champs magnétiques sont d'une certaine manière très semblables aux champs électriques, ils sont générés par et exercent des forces sur, des charges électriques. Mais il y a des différences,
  - a) la première est que les champs magnétiques n'interagissent que (sont créés par et exercent des forces sur) des charges qui sont en déplacement. Les charges ne "sentent" une force magnétique que si elles bougent;
  - b) la deuxième est que les objets magnétiques les plus simples ne sont pas des monopoles (comme un point charge) mais sont au contraire des dipôles.
- Un travail est défini par une force fois un déplacement, plus précisément par la composante de la force sur le trajet du déplacement ( $\cos \alpha$ ). Les forces magnétiques ne produisent pas de travail parce qu'elles sont perpendiculaires au déplacement. Les forces magnétiques modifient la direction de particules mais ne peuvent pas les accélérer ni les ralentir.
- **Le théorème d'Ampère** est l'inversion de la *loi de Biot et Savart*, les deux aboutissent à un même résultat. La circulation du vecteur induction magnétique  $\mathbf{B}$  le long d'un circuit fermé (C) est égal à  $\mu_0 I$  (intensité totale) qui traverse le circuit C, soit (Bleaney et Bleaney 1976, p. 106) :

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \text{sous forme différentielle :} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Ce théorème d'Ampère (sans la correction de Maxwell) s'applique donc pareillement aux situations sans variation. Il est plus simple à appliquer que la *loi de Biot et Savart* lorsque les lignes de champ de  $\mathbf{B}$  sont connues (moteurs ou transformateurs électriques).

- **La force et loi de Laplace**, sont pour un élément de courant (par ex. de longueur  $d\mathbf{l}$ ). Elles se déduisent directement de la force de Lorentz appliquée à un conducteur, donc en termes de densité ou intensité de courant :

$$\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

La force de Laplace peut être mesurée par une balance dite de Cotton dont, jouant sur la géométrie relativement à la force  $\mathbf{B}$ , un bras via une portion de conducteur est soumis à la force de Laplace quand l'autre est mécanique classique avec des poids. Les forces de Laplace sont à l'origine du moteur électrique (inventé par le russe M.H. Jacobi en 1838 pour des bateaux à St Petersburg) l'astuce étant d'inverser le courant au moment où le cadre avec le courant va trouver son équilibre, afin d'entretenir la rotation. Cela est fait via un système de collecteur-balais à contact graphite. Les forces de Laplace sont à l'œuvre dans le montage géométrique qui sert à définir l'ampère.

### ▪ Dimensions et unités découlant de la définition de l'ampère

Jackson (1999, p. 777-8) : " D'après Ampère, la force par unité de longueur entre deux fils conducteurs parallèles, infiniment long, séparés d'une distance  $d$  et portant les courants  $I$  et  $I'$  est :

$$\frac{dF_2}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d}$$

la constante  $k_2$  étant une constante de proportionnalité parente à  $k_1$  de [l'électrostatique]. Le nombre 2 sans dimension est inséré par commodité dans la spécification de  $k_2$  que l'on voit plus loin. A cause de notre choix des dimensions du courant et de charge compris dans (A.1)\* les dimensions de  $k_2$  sont déterminées relativement à  $k_1$ .

\* (A.1) : il s'agit de l'équation de continuité pour les densités de charge et de courant :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On voit facilement que le rapport  $k_1/k_2$  a la dimension d'une vitesse au carré [ $L^2t^{-2}$ ]. De plus, en comparant les valeurs des deux forces mécaniques, loi de coulomb et cette loi d'Ampère pour charges et courants connus, la valeur du rapport  $k_1/k_2$  dans le vide peut être trouvée. La valeur numérique est donnée de manière très proche par le carré de la vitesse de la lumière dans le vide :

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2$$

où  $c$  est pour la vitesse de la lumière en grandeur et en dimension.

L'induction magnétique  $\mathbf{B}$  est dérivée des lois de force d'Ampère comme étant proportionnelle numériquement à la force par unité de courant avec une constante de proportionnalité  $\alpha$  qui peut avoir certaines dimensions choisies par commodité. Ainsi pour un long fil droit portant un courant d'intensité  $I$ , l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  à une distance  $d$ , a la magnitude (et dimensions) :

$$B = 2k_2 \alpha \frac{I}{d}$$

Les dimensions du rapport entre le champ électrique et l'induction magnétique peut être trouvées des équations [de continuité (A.1), du champ électrique, du rapport  $k_1/k_2$  et de B]. Le résultat est que  $(E/B)$  a les dimensions  $(l/\alpha)$ ."

Dans le S.I. et dans les systèmes d'unités esu et emu, la valeur de la constante  $\alpha$  est 1, sans unité. Dans les systèmes d'unités Gaussian et Heaviside-Lorentz  $\alpha = c$ , dimensions  $(l t^{-1})$ .

### Définition de l'ampère

Dans le Système d'unités internationales, S.I., depuis 1948, l'ampère est défini par :

*"l'intensité du courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, de longueur infinie, de section droite négligeable placés à 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force égale à  $2 \cdot 10^{-7}$  newton par mètre de longueur."*

Cela est calculé avec l'équation  $dF_2/dl$  ci-dessus.

Jackson (1999, p. 776) : "Dans le système S.I., il est donc donné une valeur  $k_2 = 10^{-7}$  à la constante de proportionnalité  $k_2$  de l'éq.  $dF_2/dl$  ci-dessus. Les dimensions de l'ampère "absolu", considérées distinctement de sa valeur, dépendent des dimension qui ont été assignées à  $k_2$ . Dans les unités électromagnétiques conventionnelles du S.I., le courant électrique,  $I$ , a été choisi arbitrairement comme une quatrième dimension de base. Par conséquent la charge a la dimension  $I t$ , et  $k_2$  a les dimensions  $m l I^{-2} t^{-2}$ . Si  $k_2$  est pris sans dimension, alors le courant a les dimensions  $m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}$ . La question de, i) qu'une quatrième dimension de base comme le courant soit introduite, ou que ii) les quantités électromagnétiques aient des dimensions données par des puissances (quelque fois fractionnelle) des trois dimension mécaniques de base, est une affaire purement subjective et n'a pas de signification fondamentale."

De cette constante  $\mu_0$  est la **perméabilité** magnétique dans le vide (qu'on a vu ci-dessus dans la loi Biot et Savart et théorème d' Ampère sans la commenter alors) et a donc été définie comme :

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  avec les dimensions indiquées ci-dessus par Jackson de  $m l I^{-2} t^{-2}$  (masse, longueur, courant, temps) ce qui peut se traduire de plusieurs manières :

$$\mu \equiv (N/A^2), \text{ newton par ampère au carré (car force} = m l t^{-2}),$$

$$\mu \equiv (kg \cdot m/C^2), \text{ car } C, \text{ le coulomb} = 1 A \cdot \text{sec},$$

ou encore

$$\mu \equiv \frac{T \cdot m}{A} \text{ car } T = \text{tesla} = N/A^2,$$

La définition officielle (site [metricsystem.net](http://metricsystem.net), là) étant :

*" Un henry par mètre est égal à la perméabilité magnétique d'un matériel qui produit une densité de flux magnétique de un tesla, ou un weber par mètre carré, quand lui est appliqué un champ magnétique d'un ampère par mètre carré."*

ce qui amène l'expression de  $\mu$  avec l'unité définie du henry :

$$\mu \equiv \text{henry par mètre} = \frac{H}{m}$$

(henry défini plus bas dans Flux d'induction propre)

▪ La définition ci-dessus de l'ampère basée sur une valeur prise exacte de  $k_2$ , donc de  $\mu_0$ , sert ensuite à définir le coulomb (= charge véhiculée par un courant électrique de 1 ampère pendant 1 seconde) qui servira, comme on l'a vu plus haut, à son tour, à définir la permittivité électrique du vide  $\epsilon_0$  (Reitz et al. 1979, Appendix II).

$$1 A = 2,998 \cdot 10^9 \text{ esu/sec de CGS}$$

On a donc :

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \times \frac{4 \pi}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$$

Comme on l'a vu plus haut, dans le S.I. la dimension de la permittivité,  $\epsilon$ , est en farads/mètre (capacité électrique par unité de longueur), celle de  $\mu$ , la perméabilité magnétique est le Henry/mètre. Comme  $1 F = C/V$ ,  $1 H = 1 V \cdot \text{sec}/A$  et  $1 A = 1 C/\text{sec}$ ,  $k_1/k_2$  est bien en  $m^2/\text{sec}^2$ .

Comme la valeur exacte  $10^{-7}$  (H/m) a été prise arbitrairement pour  $k_2$ , le rapport  $k_1/k_2$  est aussi par définition  $10^7$  fois la constante  $k_1$  dans la loi de Coulomb.

▪ **Champ magnétique d'induction créé par un courant rectiligne indéfini**

Le cas plus compliqué d'interaction de deux fils conducteur a été vu ci-dessus pour la définition de l'ampère. Pour un fil conducteur de longueur indéfinie, pour un point situé à "a" du fil, partant de la règle de Biot et Savart et intégrant sur la longueur on arrive à :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a}$$

Ce champ est orthoradial ne dépend que de la variables a, ses lignes de champ sont des cercles axés sur le fil et l'intensité du champ reste constante le long d'une ligne de champ. La circulation de B le long d'une ligne de champ vaut  $\mu_0 I$ . Ce résultat fait apparaître une différence fondamentale avec le champ électrostatique dont la circulation le long d'une courbe fermée est toujours nulle.

▪ A été défini un nouveau vecteur  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad \text{soit (fil infini)} \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2 \pi a}$$

qui a été nommé *champ magnétique*. Puisque B est en tesla, T, et que  $\mu_0$  est en (T.m)/A, il suit que  $\mathbf{H}$  est en ampère par mètre, A m<sup>-1</sup>.

▪ **Champ magnétique d'induction de spire(s) circulaire(s) de courant, et de dipôle**

La *règle de Biot et Savart* permet de calculer le champ d'induction créé par une spire circulaire de rayon R. On trouve que la grandeur du champ  $\mathbf{B}$  en un point P situé sur l'axe z de la spire avec un angle  $\alpha$  au périmètre de la spire est donné par :

$$\mathbf{B}_z = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \alpha$$

à multiplier par N nombre de spires, s'il y a.

Et pour un solénoïde très long de longueur l, à l'intérieur du solénoïde et loin des extrémités le champ est donné par :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{IN}{l}$$

- Dipôle magnétique (Carimalo n.d. p. 171) : Si l'on reprend l'exemple de la spire circulaire, pour un point beaucoup plus grand que le rayon de la spire (OM  $\gg$  R), on montre que le *potentiel vecteur* (

$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  qu'on a défini plus haut) peut être exprimé comme (r distance entre un point M et origine,  $\theta$  angle entre OM et axe de symétrie z) :

$$A(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 I \pi R^2}{4 \pi} \frac{\sin \theta}{r^2}$$

Si  $\mathbf{m} = I \pi R^2 \mathbf{e}_z$  est le *moment magnétique* de la spire, son intensité (en A/m<sup>2</sup> en S.I.), le *potentiel vecteur* prend la forme

$$A(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 m}{4 \pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \quad \text{ou vectoriellement} \quad \mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \wedge \mathbf{OM}}{4 \pi r^3}$$

"Ces deux dernières expressions, établies pour le cas particulier d'une spire circulaire, sont en fait valables pour tout système de courant assimilable à un dipôle, et aussi bien pour de petits aimants."

▪ **Flux d'induction**

Soit une face plane S traversée par un champ  $\mathbf{B}$  perpendiculaire uniforme, on appelle flux d'induction à travers cette surface :

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- (ou la projection sur la normale à la surface S via l'angle  $\alpha$  si  $\mathbf{B}$  n'est pas perpendiculaire, i.e. à multiplier par  $\cos \alpha$ )
- à multiplier par N s'il y a N spires.

Le flux d'induction est une grandeur scalaire, n'a pas de direction (mais il a un signe, il faut choisir une face positive).

L'unité de flux d'induction est le weber, Wb : c'est le flux d'induction qui traverse une surface plane de 1 m<sup>2</sup> placée normalement aux lignes d'induction dans un champ uniforme de 1 tesla.

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ tesla} \cdot 1 \text{ m}^2 \quad \text{soit} \quad \frac{1 \text{ Wb}}{1 \text{ m}^2} = 1 \text{ T}$$

et donc aussi de la définition du tesla :

$$1 \text{ Wb} = \frac{1 \text{ N} \cdot \text{m}}{1 \text{ A}} = \frac{\text{J}}{\text{A}} = 1 \text{ V} \cdot \text{sec}$$

- Si l'induction est exprimée en Gauss (1 Wb/m<sup>2</sup> = 10<sup>4</sup> gauss) et la surface en cm<sup>2</sup>, est employé le maxwell (1 Wb = 10<sup>8</sup> maxwell).

- Un flux magnétique est généralement mesuré avec un flux-mètre, qui contient des bobines de mesure et de l'électronique, qui évalue le changement de courant dans les bobine des mesure pour calculer le flux magnétique.

▪ **Flux d'induction propre d'un circuit, coefficient d'auto-induction**

Un circuit parcouru par un courant  $I$  envoie à travers la surface  $S$  limitée à son propre contour un *flux propre* ou *flux d'auto-induction*. Du fait de la linéarité de la relation entre champ et densité de source, on peut exprimer ce **flux** sous la forme :

$$\Phi = L I$$

ce qui définit le coefficient  $L$ , appelé *coefficient d'auto-induction* ou *coefficient de self-induction*, ou parfois tout simplement *self*.

En S.I, le flux magnétique  $\Phi$  est exprimé en weber (Wb), l'intensité de courant en ampère, A. Le coefficient  $L$  s'exprime en Weber par ampère ce qui a été défini comme unité le henry (pluriel henries ou henrys), du nom de l'américain découvreur de l'auto-induction,

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ H} = \frac{1 \text{ Weber}}{1 \text{ ampère}}$$

Un circuit a une unité de self-inductance (1 henry) s'il est traversé par un flux de un weber quand circule un ampère de courant. La mesure en henry représente l'aptitude d'un circuit à emmagasiner de l'énergie dans un champ magnétique. C'est une grande unité aussi ce sont des mH et  $\mu\text{H}$  qui sont utilisés.

Mais la définition du henry s'appuie depuis son introduction en 1893 ([là](#)) sur l'électromagnétisme (metricsystem, [là](#)) : "Un henry est l'inductance d'un circuit électrique quand un courant électrique, qui change à une ampère par seconde, résulte en une force électromotrice de un volt à travers l'inducteur." "C'est un nom spécial pour le  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}$ ." donc écrit sous les formes équivalentes :

$$1 \text{ henry} = \text{H} = \frac{1 \text{ volt} \cdot \text{seconde}}{1 \text{ ampère}} = 1 \Omega \cdot \text{sec}$$

### UG-III-B. Induction électromagnétique due aux variations

Faraday a mis en évidence que lorsqu'on fait varier un flux d'induction magnétique qui traverse un circuit fermé conducteur, et uniquement lors de ses variations, ce circuit est le siège d'un courant induit. La magnitude de cette force électromotrice, f.e.m. (se comporte comme un générateur) est proportionnelle au taux de change du flux.

Le sens de ce courant est donné par la *loi de Lenz* (physicien russe, en 1834) : *le courant induit a un sens tel que ses effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance*.

Ces lois sont exprimées par la **loi de Faraday-Lenz** de caractère général pour un circuit fermé :

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{en volt})$$

où  $\varepsilon$  est la force électromotrice d'induction autour du circuit et  $\Phi$  la valeur instantanée du flux magnétique variable à travers le circuit.

▪ Exprimé plus mathématiquement, parce que  $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  et  $\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ , on peut montrer qu'on arrive facilement à la forme différentielle de la **loi de Faraday** (ex. Bleaney et Bleaney 1976, p. 133) :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

La variation de  $B$  (à droite) génère une tension dans la boucle (rotationnel).

▪ Une application sont les alternateurs qui donnent un courant alternatif. Un rotor aimant ou électroaimant est entraîné mécaniquement par une courroie et génère le champ magnétique changeant (relativement aux référence fixes). Il est entouré de bobines fixes sans sources de tension ou de courant. Un courant sinusoïdal est généré dans celles-ci une fois que la voiture roule.

▪ Une autre application sont les transformateurs, un solénoïde entourant complètement un autre. L'un primaire est alimenté par un générateur, pas l'autre, dit secondaire. Lorsque  $E$  varie des phénomènes d'induction apparaissent à la fois dans le circuit primaire et dans le circuit secondaire. Il résulte une fonction de transfert  $T$  dont on montre qu'elle est définie uniquement par le rapport du nombre respectif des tours de fil. En jouant sur ces nombres, on peut ainsi obtenir aux bornes du circuit secondaire une tension plus grande ou plus petite que la tension d'entrée.

▪ **Auto-induction électromagnétique**

Puisqu'un circuit parcouru par un courant possède un *flux propre*, flux de son propre champ magnétique à travers une surface qu'il délimite, une perturbation quelconque de ce flux  $\Phi$  créera dans le circuit une force électromotrice induite de self-induction :

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

C'est l'origine des étincelles lors de la coupure brusque du courant dans un circuit. Cela ne se produit pas au branchement parce que l'induction s'oppose pareillement au soudain accroissement du courant, il en résulte que la montée en courant est freinée, pas aussi brutale que lors d'un débranchement.

La présence de l'auto-induction prévient les variations violentes de toute intensité de courant. Il y a une analogie avec l'énergie cinétique. l'existence d'une masse prévient toute variation brusque de la vitesse qui révèle le caractère inertiel de la masse, caractère que l'on retrouve dans le coefficient d'auto-induction.

#### ▪ Courants de Foucault

L'existence d'un champ électrique électromoteur résultant des variations temporelles d'un champ magnétique est à l'origine de l'apparition de courants induits dans un conducteur placé dans ce champ. Ces courants sont appelés courants de Foucault. Par effet joule, ils occasionnent des déperditions d'énergie, qui cependant sont mises à profit dans les fours à induction

## Biblio

- Agulló-López, F. - Cabrera J.M. - Agulló-Rueda, F. 1994, "Electrooptics", Academic Press, 345p.
- Bekefi, G. - Barrett, A.H. 1977, "Electromagnetic Vibrations, Waves, And Radiation", MIT Press, 664p.
- Bleaney, B.I. - Bleaney B. 1976 (3<sup>rd</sup>ed; 1957), "Electricity and Magnetism - Volume 1", Oxford Univ. Press, 340p.
- Carimalo, C. n.d. "Champ et potentiel-vecteur magnétostatique", cours universitaires de physique, Paris, cours d'électromagnétisme, chap. 7: 153-197, [ici](#).
- Castellan, G.W. 1985 (3<sup>rd</sup>ed; 1964), "Physical Chemistry", 1000p.
- Chartier, G. 2003, "Biréfringence", in "Optique physique - biréfringence et radiométrie", Meyzonnette, J.L. (sous la dir. de), Hermes-Science, Lavoisier: 143-191.
- Durrant, A.V. 1996, "Vectors in Physics and Engineering", CRR Press, Taylor & Francis Group, 288p.
- Engel, T. - Reid, P. 2014 (3<sup>rd</sup>ed.), "Physical Chemistry", Pearson, 1040p.
- Fouchet, T. n.d. "Structure des ondes planes progressives harmoniques", Cour de Licence de physique appliquée aux sciences de la vie et de la planète, Univ. P. et M. Curie/Obs. Et. Sp. Instr. Astro., chapitre 3, [ici](#)
- Gbur, G. 2011, "Mathematical Methods for Optical Sciences", Cambridge Univ. Press, 800p.
- Griffiths, D.J. 2017 (4<sup>th</sup> ed), "Introduction to Electrodynamics", Cambridge University Press, 600p.
- Hecht, E. 2002 (4<sup>th</sup> ed.), "Optics", Addison Wesley, 698p.
- Jackson, J.D. 1999 (3<sup>rd</sup>ed; 1962) , "Classical electrodynamics", John Wiley & sons, 810p.
- Kreyszig, E. 1983 (5<sup>th</sup> edit.), "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons, 1004p. + 75p annexes.
- Liebeck, P. 1971, "Vectors and Matrices", Pergamon Press, 184p.
- McCall, M.W. - Hodgkinson, I.J. - Wu, Q. 2015, "Birefringent Thin Films and Polarizing Elements", Imperial college Press, 431p.
- Nassau, K. 1983, "The Physics and Chemistry of color", John Wiley & Sons, 454p.
- Ortolí, S. - Pharabod, J.P. 2007, "Le cantique des quantiques", La Découverte, 153p.
- Peatross, J. - Ware, M. 2015 (2024), "Physics of Light and Optics", Brigham Young University, 338p., téléchargeable à : [optics.byu.edu](http://optics.byu.edu) (merci à eux)
- Reitz, J.R. - Milford, F.J. - Christy, R.W. 1979 (3<sup>rd</sup> ed.), "Foundations of Electromagnetic Theory", Addison-Wesley Pub. Cie, 534p.
- Scharf, T. 2007 (1967), "Polarized light in Liquid Crystals and Polymers", John Wiley & sons, 400p.
- Schwarzenbach, D. 1996 (1993), "Crystallography", John Wiley & sons, 241p.
- Yariv, A. - Yeh, P. 1984, "Optical Waves in Crystals", John Wiley, 589p.